Euklidinen tasogeometria (mata128)

Juha Lehrbäck

kevät 2018

Sisältö

1. Johdanto

1.1. **Tasogeometrian historiaa lyhyesti.** Ensimmäiset säilyneet geometriaan liittyvät lähteet ovat noin 4000 vuoden takaa Egyptistä ja Babyloniasta (nykyisen Irakin alueelta). Nämä eivät sisällä mitään systemaattista teoriaa vaan yksittäisiä esimerkkejä pinta-alojen ja tilavuuksien laskemisesta tai vaikkapa pyramidin sivutahkojen ”jyrkkyyteen” liittyen.

Antiikin kreikkalaiset loivat geometriasta (ja samalla oleellisesti kaikesta aikansa matematiikasta) täsmällisen ja johdonmukaisen tieteenalan. Ensimmäisenä kreikkalaisena geometrikkona mainitaan Thales Miletoslainen, joka eli noin 600 eaa. Perimätiedon mukaan hän oli ensimmäinen matemaatikko, joka esitti todistuksia väitteille, esimerkiksi hänen nimeään kantavalle tulokselle, jonka mukaan puoliympyrän sisällä oleva kulma on aina suora kulma. Myös nimi *geometria* on peräisin Kreikasta: *geo* = maa, *metrein* = mitata.

Pythagoras Samoslainen ja hänen perustamansa koulukunta vaikuttivat suuresti geometrian kehittymiseen 500–400-luvuilla eaa. Tosin jo muinaset babylonialaiset tunsivat ilmeisesti Pythagoraan lauseen sisällön kauan ennen Pythagorasta. Filosofi Platon piti geometrian osaamista tärkeänä kaikille oppineille, ja sitä opetettiinkin hänen 385 eaa. perustamassaan ”filosofikoulussa” Ateenan Akatemiassa.

Eukleides Aleksandrialainen kokosi kreikkalaisen geometrian perusteet kirjaansa *Alkeet* (kreikaksi $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\tilde{\iota}\alpha$ eli *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*) noin vuonna 300 eaa.

Tämä kirja, joka on ylivoimaisesti kaikkien aikojen luetuin ja levinnein matemaattinen teos, loi pohjan alkeisgeometrian opetukselle yli 2000 vuodeksi.

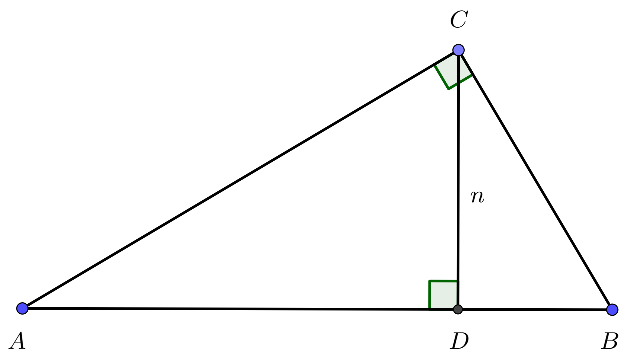
Kaikista ansioistaan huolimatta Eukleideen esitys on varsinkin aivan geometrian perusteiden osalta jonkin verran epätarkka ja puuttellinen. Kuitenkin kesti 1800-luvun loppupuolelle asti, ennen kuin nämä puutteet saatiin täysin korjattua. Merkittävimpiä tekijöitä tässä kehityksessä oli saksalainen David Hilbert, joka oli aikansa johtavia matemaatikkoja. Hänen kirjansa *Grundlagen der Geometrie* eli *Geometrian perusteet* julkaistiin vuonna 1899.

1.2. **Todistukset geometriassa.** Geometrian teoria rakentuu erilaisista käsitteistä (kuten suora, kolmio, yhdensuuntaisuus, yhdenmuotoisuus ja niin edelleen) sekä näitä käsitteitä koskevista tuloksista. Nämä tulokset ovat väitteitä, jotka täytyy luonnollisesti todistaa oikeiksi. Esimerkiksi Pythagoraan lause väittää, että suorakulmaisessa kolmiossa "hypotenuusan neliö on kateettien neliöiden summa". Tämä ei ole mitenkään itsestään selvää, eikä kokeilu takaa, että väite olisi voimassa kaikille suorakulmaisille kolmiolle. Tarvitaan siis yleispätevä todistus.

Seuraavassa on Pythagoraan lause vähän täsmällisemmin muotoiltuna sekä eräs todistus tälle lauseelle:

Lause 1.1 (Pythagoras)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa kulma $\measuredangle C = \measuredangle ACB$ on suora kulma. Tällöin*
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2.$$

(Tässä $|AB|$ tarkoittaa janan AB pituutta.)



Todistus. (1) Piirretään kolmion sivulle AB normaali n, joka kulkee pisteen C kautta. Olkoon D sivun AB ja normaalin n leikkauspiste.

(2) Tällöin kulmat $\measuredangle ADC$ ja $\measuredangle BDC$ ovat suoria kulmia.

(3) Nyt kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$ on suora kulma sekä yhteinen kulma pisteessä A, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Vastaavasti myös kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle CBD$ ovat yhdenmuotoiset.

(4) Koska yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinsivujen pituuksien suhde on vakio, saadaan, että
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

(5) Näistä kaavoista saadaan ristiin kertomalla, että $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ ja $|BC|^2 = |BD| \cdot |AB|$. Siten

$$\begin{aligned} |AC|^2 + |BC|^2 &= |AD| \cdot |AB| + |BD| \cdot |AB| \\ &= \big(|AD| + |BD|\big)|AB| = |AB| \cdot |AB| \\ &= |AB|^2, \end{aligned}$$

joten väite on todistettu. □

Onko Pythagoraan lause nyt todistettu vakuuttavasti ja yleispätevästi? Vastaus on kyllä, mikäli kaikki todistuksen vaiheet (1)–(5) ovat sallittuja; niiden täytyy siis perustua joihinkin **aikaisemmin** annetuihin määritelmiin tai tuloksiin. Nämä aikaisemmat määritelmät ja tulokset puolestaan perustuvat **vielä aikaisempiin** määritelmiin ja tuloksiin, ja niin edelleen.

Tätä ketjua kohti aikaisempia määritelmiä ja tuloksia ei tietenkään voida jatkaa loputtomiin. Jossakin kohdassa on siis sovittava **perusolettamukset** eli **aksioomat** sekä niihin liittyvät **peruskäsitteet**, joiden varaan muu teoria tuloksineen ja määritelmineen voidaan rakentaa.

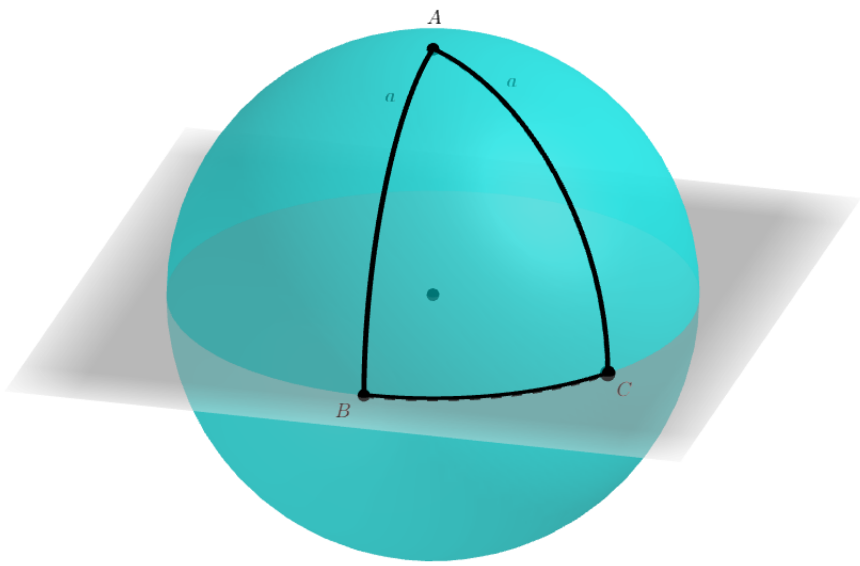
Jo Eukleides ymmärsi aksioomien tarpeellisuuden. Tällä kurssilla emme kuitenkaan käytä Eukleideen alkuperäisiä aksioomia (katso Liite B), koska myöhemmin on huomattu että ne eivät ole riittävän kattavat täsmällisen teorian luomiseksi. (Eukleides käytti päättelyissään tietoja ja olettamuksia, jotka tarkkaan ottaen eivät seuraa mistään hänen aksioomistaan tai niiden pohjalta todistetuista tuloksista.) Tämän kurssin aksioomajärjestelmä mukailee Hilbertiltä peräisin olevaa järjestelmää, kuitenkin muutamin yksinkertaistuksin. Tarvittavia aksioomia otetaan käyttöön kurssin alkupuoliskolla aina uuteen asiaan siirryttäessä, mutta kaikki kurssin aksioomat löytyvät listattuna myös monisteen lopusta Liitteestä A. Tarkemmin erilaisiin geometrian aksioomajärjestelmiin liittyviin asioihin syvennytään kurssilla *Geometria*, jonka voi ajatella olevan tämän *Euklidinen tasogeometria* -kurssin täydennys- ja jatko-osa.

1.3. **Päteekö Pythagoraan lause aina?** Voidaan myös kysyä, millä ehdoilla tai minkälaisissa tilanteissa edellä esitetty Pythagoraan lause todistuksineen on voimassa. Tutkitaan esimerkiksi tilannetta, jossa kolmio $\triangle ABC$ onkin piirretty (Maa)pallon pinnalle. Oletetaan, että sivu BC sijaitsee päiväntasaajalla. Koska kulma $\measuredangle C$ on suora kulma, kulkee sivu AC päiväntasaajalta suoraan pohjoiseen tai etelään; oletetaan esimerkiksi, että piste A sijaitsee pohjoisella pallonpuoliskolla. Jana pisteestä A pisteeseen B kulkee puolestaan lyhyintä reittiä pallonpintaa pitkin.

Viedään nyt piste A pohjoisnavalle asti. Tällöin janan AC pituus on siis matka päiväntasaajalta pohjoisnavalle; merkitään $|AC| = a$. Koska myös piste B sijaitsee päiväntasaajalla, on janan AB pituus samoin a. Mutta tällöin Pythagoraan lause **ei ole voimassa** suorakulmaiselle kolmiolle $\triangle ABC$, sillä tietysti $|BC| > 0$ ja näin ollen

$$|AC|^2 + |BC|^2 = a^2 + |BC|^2 > a^2 = |AB|^2.$$

Tässä ei ole ristiriitaa esittämämme todistuksen kanssa, sillä tarkoituksenamme on rakentaa tasogeometrian teoriaa, eikä pallon pinta tietenkään ole taso. Kannattaa kuitenkin huomata, että koska Pythagoraan lause ei ole voimassa pallon pinnalla,



Suorakulmainen kolmio pallon pinnalla

eivät ainakaan kaikki todistuksen vaiheet (1)–(5) voi myöskään olla voimassa. Mikä siis menee pieleen ja miksi? Ja toisaalta, mikä takaa meille, että olemme tasogeometrian teoriaa rakentaessamme todella **tasolla**, joka käyttäytyy kuten "tason täytyy", emmekä jollakin muulla "kaarevalla" pinnalla kuten vaikkapa pallon pinnalla?

Yksinkertainen vastaus on, että otamme käyttöön sellaiset perusolettamukset, jotka vastaavat käsitystämme tason ilmiöistä, ja rakennamme geometrian näiden varaan. Se, miten juuri näihin aksioomiin on päädytty, on oma pitkä tarinansa, johon ei tässä yhteydessä sen tarkemmin puututa. Meidän kannaltamme oleellista on huomata kurssin kuluessa, miten kaikille tutuille tasogeometrian tuloksille saadaan aksioomien luoman perustan avulla täsmälliset todistukset.

2. Pisteet ja suorat

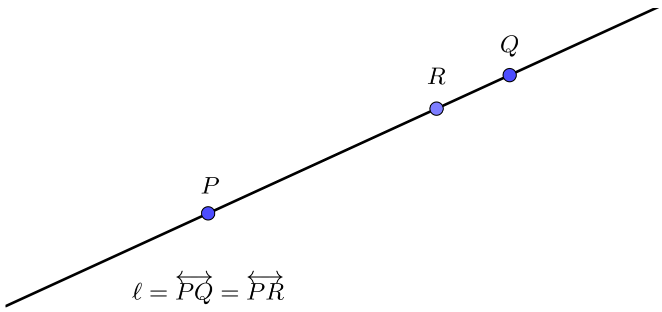
2.1. **Pisteitä suorilla.** Oletamme tunnetuksi käsitteet **piste**, **suora** ja näitä yhdistävä **piste on suoralla** (eli **suora kulkee pisteen kautta**). Pisteitä merkitään yleensä isoilla kirjaimilla $A, B, C, \ldots, O, P, Q, \ldots$, suoria pienillä kirjaimilla $\ell, m, n, s, t, \ldots$, ja merkintä $P \in \ell$ tarkoittaa, että piste P on suoralla ℓ.

Tarkemmin ottaen nämä käsitteet ovat niin sanottuja **peruskäsitteitä**, joita emme edes yritä määritellä. Emme voi käyttää näihin käsitteisiin liittyen mitään muita ominaisuuksia, kuin niitä, jotka mainitaan **perusolettamuksissa** eli **aksioomissa**, tai jotka saadaan aksioomien pohjalta todistetuissa tuloksissa.

Ensimmäiset aksioomamme käsittelevät juuri edellä mainittuja kolmea peruskäsitettä:

(A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora ℓ siten, että $P \in \ell$ ja $Q \in \ell$.

Pisteiden P ja Q kautta kulkevalle yksikäsitteiselle suoralle ℓ käytetään merkintää $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$. Huomaa, että jos $R \in \overleftrightarrow{PQ}$ ja $R \neq P$, $R \neq Q$, niin $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{RQ}$.



(A2) Jokaisella suoralla on ainakin kaksi eri pistettä.

(A3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

Aksiooma **(A3)** sanoo, että tasossamme on **ainakin** kolme pistettä, ja että kaikki tason pisteet eivät ole samalla suoralla.

Aksioomien **(A1)**–**(A3)** pohjalta ei voi tietenkään luoda kovin mielenkiintoista geometriaa, mutta joitakin lauseita näidenkin seurauksena saadaan todistettua. Määritellään ensin, että piste P on suorien ℓ ja m **leikkauspiste**, jos $P \in \ell$ ja $P \in m$.

Lause 2.1. *Oletetaan, että ℓ ja m ovat eri suoria eli $\ell \neq m$. Tällöin suorilla ℓ ja m on korkeintaan yksi leikkauspiste.*

Todistus. Tehdään antiteesi, että suorat ℓ ja m leikkaavat ainakin kahdessa eri pisteessä $P \neq Q$. Aksiooman (A1) nojalla on kuitenkin olemassa täsmälleen yksi suora $\overleftrightarrow{PQ}$, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta. Siispä täytyy olla $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$ ja toisaalta

$m = \overleftrightarrow{PQ}$, joten $\ell = m$. Tämä on ristiriita oletuksen $\ell \neq m$ kanssa, joten leikkauspisteitä voi olla korkeintaan yksi. □

Lause 2.2. *Kun ℓ on suora, niin on ainakin yksi piste, joka ei ole suoralla ℓ.*

Todistus. Tämä seuraa suoraan aksioomasta (A3), jonka mukaan kaikki pisteet eivät ole samalla suoralla! □

Lause 2.3. *Kun P on piste, niin on ainakin yksi suora, joka ei kulje pisteen P kautta.*

Todistus. Aksiooman (A3) nojalla on olemassa piste $A \neq P$ (koska on olemassa ainakin 3 eri pistettä). Aksiooman (A1) nojalla on olemassa suora $\ell = \overleftrightarrow{AP}$, ja Lauseen 2.2 nojalla on olemassa piste B, joka ei ole suoralla ℓ.

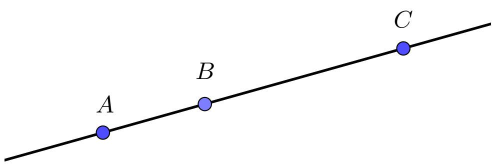
Tällöin suora $m = \overleftrightarrow{AB}$ on haluttu suora: ainakin $m \neq \ell$, koska $B \in m$ mutta $B \notin \ell$. Suorat ℓ ja m leikkaavat pisteessä A, ja koska $P \neq A$ ja eri suorilla voi Lauseen 2.1 nojalla olla korkeintaan yksi leikkauspiste, ei $P \in \ell$ voi olla suoralla m. Siispä $P \notin m$, kuten haluttiinkin. □

Lause 2.4. *Kun P on piste, niin on olemassa ainakin kaksi eri suoraa, jotka kulkevat pisteen P kautta.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

2.2. **Pisteiden järjestys.** Kuvasta katsottuna on selvää, mitä tarkoittaa, että joku piste on kahden muun pisteen välissä. Esimerkiksi Pythagoraan lauseen todistuksen kohdassa (1) on oleellista, että piste D on todella sivulla AB eli pisteiden A ja B välissä. Mutta onko tilanne aina varmasti tällainen ja miten tämä voidaan perustella?

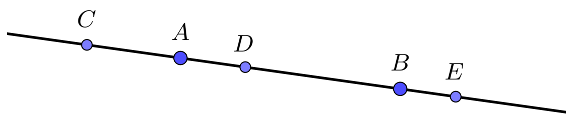
Samalla suoralla olevien pisteiden järjestykseen liittyy peruskäsite **piste B on pisteiden A ja C välissä**. Tätä merkitään $A*B*C$ (tai $C*B*A$) ja näin kirjoittaessa vaaditaan aina, että A, B ja C ovat eri pisteitä ja $B \in \overleftrightarrow{AC}$.



Piste B on pisteiden A ja C välissä eli $A * B * C$.

Tämän käsitteen ominaisuuksista kertoo seuraava aksiooma:

(A4) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että
$$C * A * B,\ A * D * B \text{ ja } A * B * E.$$
Jos lisäksi A, B ja C ovat suoran ℓ eri pisteitä, niin **täsmälleen** yksi seuraavista on voimassa:
$$C * A * B,\ A * C * B \text{ tai } A * B * C.$$



Välissäolon avulla saadaan esitettyä tuttuja määritelmiä.

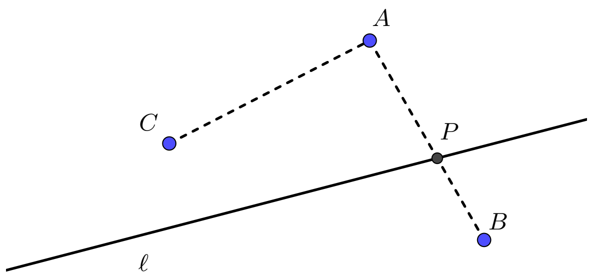
Määritelmä. Olkoot A ja B eri pisteitä. Tällöin

(a) **jana** AB koostuu pisteistä A ja B sekä näiden välissä olevista pisteistä; toisin sanoen
$$AB = \{A, B\} \cup \{P \in \overleftrightarrow{AB} : A * P * B\}.$$

(b) **puolisuora** $\overrightarrow{AB}$ koostuu niistä suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteistä P, joille pätee $A * P * B$ tai $A * B * P$, sekä pisteistä A ja B; toisin sanoen
$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{P \in \overleftrightarrow{AB} : A * B * P\}.$$

Useissa tilanteissa on oleellista tietää, millä puolella tiettyä suoraa joku piste on. Tätä varten annamme määritelmän suoran samalla ja eri puolilla olemiselle.

Määritelmä. Olkoon ℓ suora ja olkoot A, B pisteitä, jotka eivät ole suoralla ℓ. Pisteet A ja B ovat **eri puolilla suoraa** ℓ, jos jana AB leikkaa suoraa ℓ eli on olemassa piste $P \in \ell$ siten, että $A * P * B$. Tällöin merkitään $A\ell B$. Jos tällaista pistettä C ei ole (eli jana AB ei leikkaa suoraa ℓ tai $A = B$), ovat pisteet A ja B **samalla puolella suoraa** ℓ ja merkitään $AB\ell$.



Kuvassa $A\ell B$ ja $AC\ell$

Jos $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$, voidaan vastaavasti merkitä $A\overleftrightarrow{PQ}B$ tai $AB\overleftrightarrow{PQ}$. Näihin määritelmiin liittyy seuraava aksioomamme.

(A5) Olkoon ℓ suora ja olkoot A, B, C pisteitä, jotka eivät ole suoralla ℓ.
(a) Jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$.
(b) Jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

Suoraviivaisena seurauksena aksioomasta (A5) saadaan

Lause 2.5. *Olkoon ℓ suora ja olkoot A, B, C pisteitä, jotka eivät ole suoralla ℓ. Jos $AB\ell$ ja $B\ell C$, niin $A\ell C$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. (Kokeile antiteesiä!) □

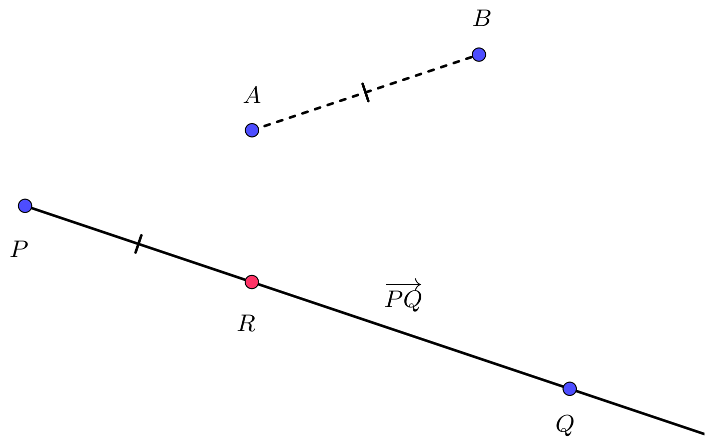
Olkoon ℓ suora ja A piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin kaikki pisteet P, joille pätee $AP\ell$, muodostavat pisteen A määräämän **puolitason** suoran ℓ suhteen. Aksiooma (A5) takaa, että jokainen suora ℓ jakaa tason täsmälleen kahteen puolitasoon, kuten luonnollista onkin.

Huomaa, että aksiooma (A5) ei ole voimassa avaruusgeometriassa, jossa voidaan helposti löytää pisteet A, B, C siten, että jana AC leikkaa suoraa ℓ, jolloin siis $A\ell C$, mutta kuitenkin $AB\ell$ ja $BC\ell$; janat AB ja BC siis "kiertävät" suoran ℓ. Suurin osa muista aksioomistamme toimii myös 3-ulotteisessa avaruusgeometriassa, joten tässä mielessä (A5) on tasogeometrian kannalta hyvin oleellinen.

2.3. **Janojen yhtenevyys ja mittaaminen.** Tarvitsemme myös peruskäsitteen, joka vastaa käsitystämme siitä, että janat AB ja CD ovat "yhtä pitkät". Tätä kutsutaan **janojen yhtenevyydeksi** ja sille käytetään merkintää $AB \cong CD$.

Aksiooma (A6) antaa luvan "siirtää" janan AB mille tahansa puolisuoralle.

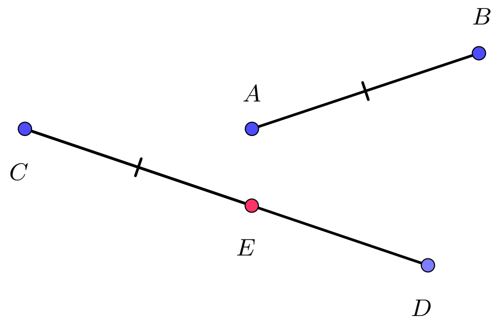
(A6) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.



Janojen yhtenevyyden avulla on myös mahdollista määritellä (ilman varsinaista mittaamista), mitä tarkoittaa että jokin jana on lyhyempi kuin toinen.

Määritelmä. Jana AB on **lyhyempi** kuin jana CD, jos on olemassa piste E siten, että $C * E * D$ ja $AB \cong CE$. Tällöin merkitään $AB < CD$.

Tämä vertailu ei tietenkään kerro mitään siitä, kuinka *paljon* jana AB on janaa CD lyhyempi.



Kuvassa $AB < CD$

Tasogeometriaa voisi kehittää tästä eteenpäinkin pelkän janojen yhtenevyyden käsitteen ja yllä määritellyn alkeellisen vertailun avulla, ja näin alkuperäisissä Eukleideen ja Hilbertin aksioomajärjestelmissä tehdäänkin. Otamme kuitenkin jo tässä vaiheessa käyttöön janojen pituuden käsitteen eli janamitan, jonka avulla monet päätelmät hieman suoraviivaistuvat. Seuraavassa **janamitta-aksioomassa (JMA)** kuvatun janan pituuden olemassaolo voidaan itse asiassa todistaa Hilbertin aksioomajärjestelmän perusteella; tässä tarvitaan erityisesti niin sanottua Arkhimedeen aksioomaa. Me ohitamme nämä perustelut ja otamme janamitan perusominaisuudet käyttöön aksioomina. (Lisätietoa janamitan konstruktiosta on tarjolla kurssilla *Geometria.*)

(JMA) Jokaisella janalla AB on **pituus** $|AB| > 0$ siten, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(a) $AB \cong CD \iff |AB| = |CD|$
(b) $A * B * C \iff |AC| = |AB| + |BC|$
(c) Jos $r \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$, niin on olemassa pisteet P ja Q siten, että $|PQ| = r$.

Janamitta-aksiooman kohta (c) on hyvin vahva, sillä se tuo oleellisesti kaikki (positiiviset) reaaliluvut mukaan geometriaan. Puhtaan geometrisissa tarkasteluissa tätä kohtaa koitetaankin usein välttää.

Janojen vertailu voidaan nyt tehdä myös janojen pituuksien avulla:

Lemma 2.6. *Olkoot AB ja CD janoja. Tällöin $|AB| < |CD| \iff AB < CD$.*

Todistus. Todistetaan "$\Rightarrow$". Oletetaan siis, että $|AB| < |CD|$. Aksiooman (A6) nojalla voidaan valita piste $E \in \overrightarrow{CD}$ niin, että $AB \cong CE$. Nyt on kolme vaihtoehtoa: (i) $C * E * D$, (ii) $E = D$ tai (iii) $C * D * E$.

Tapauksessa (ii) pätee $CE = CD$ ja siten $AB \cong CD$, jolloin (JMA)(a) nojalla $|AB| = |CD|$. Toisaalta oletuksen perusteella $|AB| < |CD|$. Yhdistämällä edelliset tiedot saadaan $|AB| < |CD| = |AB|$, mikä on selvästi mahdotonta.

Tapauksessa (iii) pätee (JMA)(a) ja (b) nojalla, että

$$|AB| = |CE| = |CD| + |DE| > |CD|,$$

kun taas oletuksen nojalla $|AB| < |CD|$. Nämä yhdistämällä päädytään jälleen ristiriitaan $|AB| < |CD| < |AB|$.

Tapaukset (ii) ja (iii) eivät siis voi tulla kyseeseen, ja näin ollen tapauksen (i) on oltava voimassa. Siispä $C * E * D$, mistä seuraa, että $AB < CD$, kuten haluttiinkin.

Suunta "$\Leftarrow$" jätetään harjoitustehtäväksi. □

Janamitta-aksioomaan vedoten voidaan todistaa, että jokaisella janalla on **keskipiste**, joka jakaa janan kahteen yhtenevään osaan. Myöhemmin palaamme asiaan ja mietimme, miten saman voi todistaa geometrisesti.

Lause 2.7. *Olkoon AB jana. Tällöin on olemassa keskipiste $E \in AB$, jolle siis pätee, että $AE \cong EB$.*

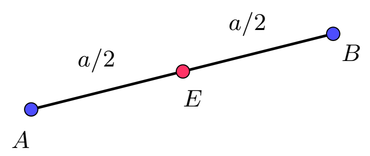
Todistus. Merkitään $a = |AB|$. Tavoitteena on löytää piste $E \in AB$, joka on janan puolivälissä; halutaan siis, että $|AE| = a/2 = |EB|$.

Koska $a/2 \in \mathbb{R}$ ja $a/2 > 0$, on (JMA)(c) nojalla olemassa pisteet P ja Q, joille pätee $|PQ| = a/2$. Nyt aksiooman (A6) nojalla puolisuoralta $\overrightarrow{AB}$ löytyy piste E siten, että $AE \cong PQ$, jolloin (JMA)(a) perusteella $|AE| = |PQ| = a/2$.

Erityisesti $|AE| = a/2 < a = |AB|$, joten edellisen Lemman 2.6 nojalla $AE < AB$. Koska $E \in \overrightarrow{AB}$, tarkoittaa tämä sitä, että välttämättä $A*E*B$. Näin ollen (JMA)(b) nojalla $|AB| = |AE| + |EB|$, mistä saadaan, että

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - \tfrac{a}{2} = \tfrac{a}{2} = |AE|.$$

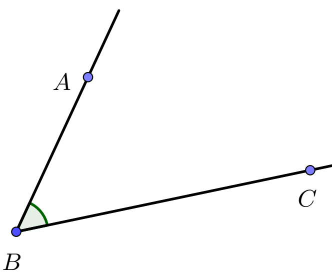
Niinpä (JMA)(a) perusteella todella pätee, että $AE \cong EB$. □



3. Kulmat ja kolmiot

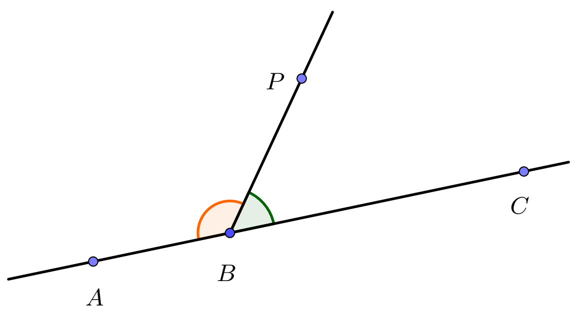
3.1. **Kulmia.** Johdannossa esitetyssä Pythagoraan lauseen todistuksessa tarvitsimme heti alussa tietoa, että suoran ℓ ulkopuolella olevan pisteen P kautta kulkee suora n, joka on suoran ℓ normaali. Jotta voimme perustella tämän vaiheen, täytyy meidän luonnollisesti määritellä ensin, mikä on *normaali*. Tämä puolestaan liittyy läheisesti kulmiin, erityisesti suoriin kulmiin.

Määritelmä. Olkoot A, B, C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Tällöin puolisuorat $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ muodostavat **kulman** $\measuredangle ABC$ (tai $\measuredangle CBA$). Puolisuorat $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ ovat tämän kulman **kyljet** ja piste B on kulman **kärki**.



Jos kulman $\measuredangle ABC$ kyljet ovat asiayhteydestä selvät, voidaan käyttää myös lyhyempää merkitää $\measuredangle B = \measuredangle ABC$. Huomaa, että jos $D \in \overrightarrow{BA}$ ja $E \in \overrightarrow{BC}$, niin kulma $\measuredangle DBE$ on sama kuin kulma $\measuredangle ABC$ eli $\measuredangle DBE = \measuredangle ABC$. Emme tee eroa kulman oikean tai vasemman kyljen välille, koska tasogeometriassamme kaikki kulmat ovat "nollakulman" ja "oikokulman" välissä. Jokaisella kulmalla on myös vieruskulma:

Määritelmä. Jos $A * B * C$ ja piste P ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AC}$, ovat kulmat $\measuredangle ABP$ ja $\measuredangle CBP$ toistensa **vieruskulmat**.

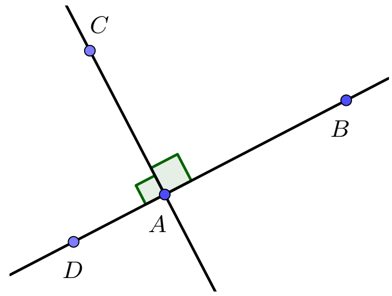


Aivan kuten janojen tapauksessa, tarvitsemme myös kulmille peruskäsitteen, joka vastaa sitä, että kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ ovat "yhtä suuret". Tätä kutsutaan **kulmien yhtenevyydeksi** ja sille käytetään merkintää $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.

Erittäin tärkeä erikoistapaus on se, kun kulma on yhtenevä vieruskulmansa kanssa.

Määritelmä. (a) Jos kulma $\measuredangle ABP$ on yhtenevä vieruskulmansa $\measuredangle CBP$ kanssa, on $\measuredangle ABP$ **suora kulma**. (Huomaa, että tällöin myös $\measuredangle CBP$ on suora kulma.)

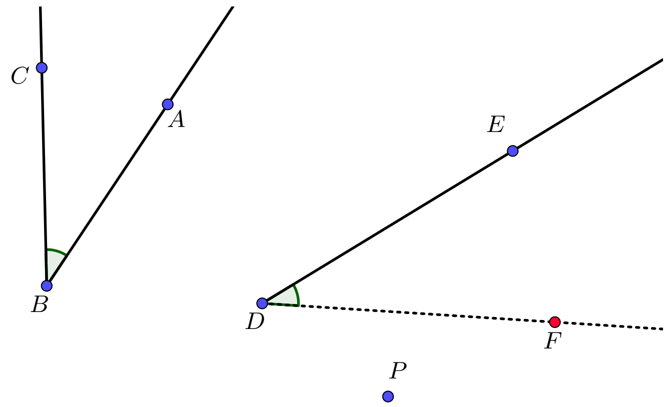
(b) Olkoot $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ eri suoria. Jos kulma $\measuredangle BAC$ on suora kulma, ovat suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$ toistensa **normaaleja**. Tällöin merkitään $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ja voidaan myös sanoa, että suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$, koska $\measuredangle BAC$ on yhtenevä vieruskulmansa $\measuredangle DAC$ kanssa

Seuraava aksiooma (A7) on janojen ”siirtoaksiooman” (A6) vastine kulmille: halutun kokoinen kulma voidaan sen avulla asettaa pisteeseen D niin, että toinen kylki on annettu puolisuora $\overrightarrow{DE}$. Huomaa, että aksiooman piste P määrittää kummalleko puolelle suoraa $\overleftrightarrow{DE}$ kulma asetetaan.

(A7) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

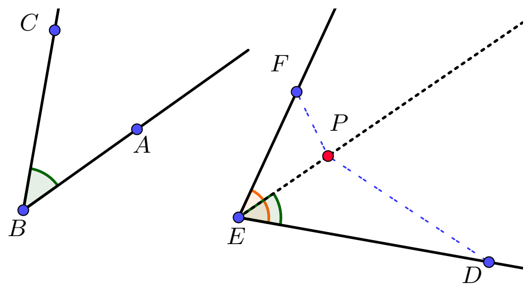


Kulmien yhtenevyyden avulla voidaan määritellä myös mitä tarkoittaa, että jokin kulma on pienempi kuin toinen kulma. Tätä varten täytyy kuitenkin ensin määritellä, milloin tietty piste on kulman sisällä.

Määritelmä. (a) Piste P on **kulman $\measuredangle ABC$ sisällä**, jos $PA\overleftrightarrow{BC}$ ja $PC\overleftrightarrow{AB}$.

(b) Kulma $\measuredangle ABC$ on **pienempi** kuin kulma $\measuredangle DEF$, jos kulman $\measuredangle DEF$ sisällä on piste P siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEP$. Tällöin merkitään $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$.

Aivan kuten janojen tapauksessa, myös kulmien osalta voitaisiin tasogeometriaa kehittää eteenpäin vain yhtenevyyden ja edellä kuvatun yksinkertaisen vertailun avulla. Otamme kuitenkin myös kulmille käyttöön heti oman mitan eli niin sanotun astemitan, jonka keskeisimmät ominaisuudet on listattuna seuraavassa **kulmamitta-aksioomassa (KMA)**.



$PD\overleftrightarrow{EF}$ ja $PF\overleftrightarrow{DE}$, joten P on kulman $\measuredangle DEF$ sisällä.
Koska $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEP$, on tällöin $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$.

> **(KMA)** Jokaisella kulmalla $\measuredangle ABC$ on **astemitta** $0 < (\measuredangle ABC)^\circ < 180$ siten, että
> (a) $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
> (b) Jos piste D on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä, niin
> $$(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$$
> (c) Vieruskulmien astemittojen summa on 180.

Kirjataan muutamia tärkeitä kulmamitta-aksiooman seurauksia:

Lause 3.1. *Kulma $\measuredangle ABC$ on suora kulma jos ja vain jos $(\measuredangle ABC)^\circ = 90$.*

Todistus. Todistetaan "$\Rightarrow$": Koska $\measuredangle ABC$ on suora kulma, on se yhtenevä vieruskulmansa kanssa; olkoon tämä vieruskulma $\measuredangle DBA$. Tällöin (KMA)(a) nojalla $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DBA)^\circ$. Toisaalta (KMA)(c) nojalla $(\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle DBA)^\circ = 180$, joten

$$180 = (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle DBA)^\circ = (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ = 2 \cdot (\measuredangle ABC)^\circ.$$

Tästä seuraa, että $(\measuredangle ABC)^\circ = 90$, kuten haluttiin.

Suunta "$\Leftarrow$" on harjoitustehtävä. $\square$

Lemma 3.2. *Olkoot $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DEF$ kulmia. Tällöin*

$$(\measuredangle ABC)^\circ < (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC < \measuredangle DEF.$$

Todistus. Todistetaan "$\Leftarrow$". Oletetaan siis, että $\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$. Tällöin määritelmän mukaan kulman $\measuredangle DEF$ sisällä on piste P siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEP$, jolloin (KMA)(a) nojalla $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEP)^\circ$. Koska P on kulman $\measuredangle DEF$ sisällä, niin (KMA)(b) perusteella $(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEP)^\circ + (\measuredangle PEF)^\circ$, ja koska $(\measuredangle PEF)^\circ > 0$, saadaan

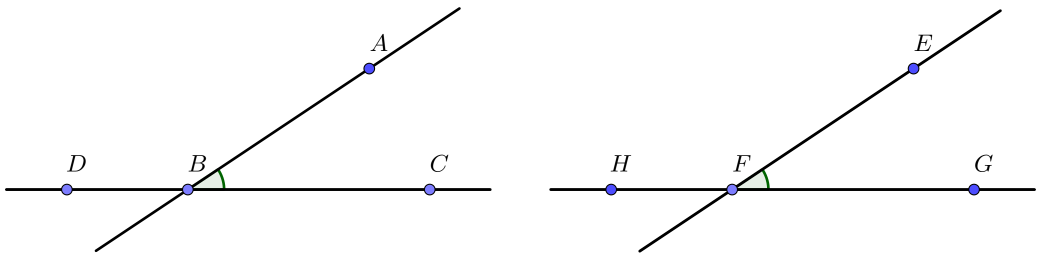
$$(\measuredangle DEF)^\circ = (\measuredangle DEP)^\circ + (\measuredangle PEF)^\circ > (\measuredangle DEP)^\circ + 0 = (\measuredangle ABC)^\circ.$$

Näin ollen $(\measuredangle ABC)^\circ < (\measuredangle DEF)^\circ$, kuten haluttiinkin.

Suunta "$\Rightarrow$" jätetään harjoitustehtäväksi; vertaa vastaavaan janamittoja koskevaan tulokseen. $\square$

Kulmamitta-aksioomaan nojautuen saadaan todettua helposti, että yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat myös yhtenevät.

Lause 3.3. *Oletetaan, että* $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EFG$ *ja että* $D * B * C$ *ja* $H * F * G$*. Tällöin* $\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFE$*.*



Todistus. (KMA)(c) nojalla

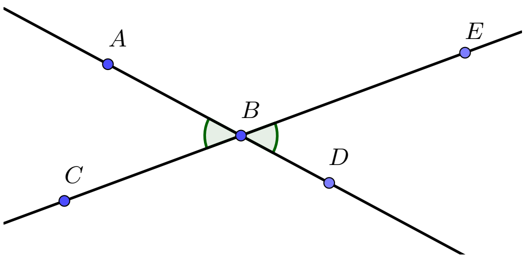
$$(\measuredangle DBA)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ = 180 = (\measuredangle HFE)^\circ + (\measuredangle EFG)^\circ.$$

Toisaalta (KMA)(a) perusteella $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle EFG)^\circ$, jolloin täytyy olla myös $(\measuredangle DBA)^\circ = (\measuredangle HFE)^\circ$. Väite seuraa tästä (KMA)(a) nojalla. □

Tästä seuraa myös **ristikulmien** yhtenevyys:

Lause 3.4. *Olkoon* $\measuredangle ABC$ *kulma sekä* $A * B * D$ *ja* $C * B * E$*. Tällöin* $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DBE$*.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □



3.2. **Kolmiot, (SKS) ja normaalien olemassaolo.**

Määritelmä. Olkoot A, B, C eri pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Tällöin ne määräävät **kolmion** $\triangle ABC$. (Tässä merkinnässä pisteiden järjestys on oleellinen, joten voidaan ajatella, että kolmio on itse asiassa järjestetty pistekolmikko.) Pisteet A, B ja C ovat kolmion $\triangle ABC$ **kärjet**, janat AB, BC ja AC ovat sen **sivut** ja kulmat $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle C = \measuredangle ACB$ ovat tämän kolmion kulmat.

Janojen ja kulmien yhtenevyydet ovat peruskäsitteitä, joita ei erikseen määritelty. Kolmioiden yhtenevyys sen sijaan voidaan määritellä kolmioiden osien yhtenevyyden avulla.

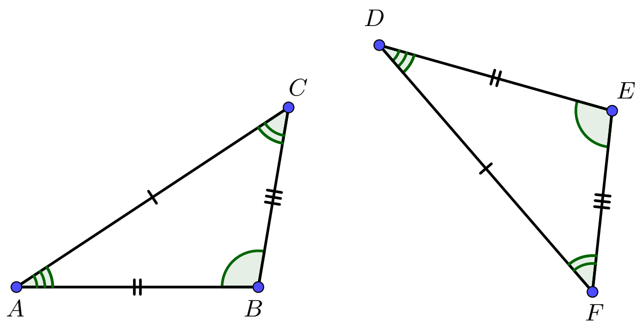
Määritelmä. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat **yhtenevät**, jos niiden kaikki vastinosat ovat yhtenevät eli jos

$$AB \cong DE, \; AC \cong DF \text{ ja } BC \cong EF$$

sekä

$$\measuredangle A \cong \measuredangle D, \; \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ ja } \measuredangle C \cong \measuredangle F.$$

Tällöin merkitään $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Kolmioiden **yhtenevyyssääntöjen** ideana on, että itse asiassa kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ saadaan yhteneviksi jo silloin, kun *riittävän monet* vastinosista ovat yhtenevät. Kaikkia yhtenevyyssääntöjä ei voida todistaa lauseina, vaan käytännössä yksi niistä on otetava aksioomaksi; yleensä valitaan (SKS) eli sivu–kulma–sivu -sääntö. Nimitys tulee siitä, että kolmioista oletetaan yhteneviksi yhdet kulmat sekä näiden kulmien vieressä olevat sivut.

(A8) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että

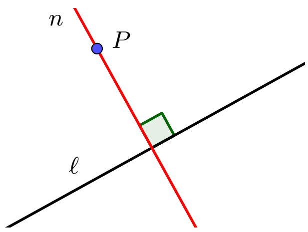
$$AB \cong DE, \; \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ ja } BC \cong EF.$$

Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Eräs tulkinta tälle aksioomalle on, että se takaa tason olevan "samanlainen" joka puolella: Jos kulmaa $\measuredangle ABC$ "siirretään" eri puolille tasoa niin, että janojen AB ja BC pituudet pysyvät muuttumattomina, myös janan AC pituus sekä kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle C$ pysyvät koko ajan yhtä suurina.

Muihin yhtenevyyssääntöihin tutustutaan hieman myöhemmin. Todistetaan ennen tätä (SKS)-säännön avulla tärkeä tulos, joka kertoo että jokaisen pisteen kautta kulkee aina normaali mille tahansa annetulle suoralle. Muista, että tätä tietoa tarvittiin esimerkiksi Pythagoraan Lauseen 1.1 todistuksessa.

Lause 3.5 (Normaalin olemassaolo, osa 1). *Olkoon ℓ suora ja P mikä tahansa piste. Tällöin on olemassa suora n siten, että $P \in n$ ja $n \perp \ell$.*



Todistus. **(1.)** Tutkitaan tapaus, jossa $P \notin \ell$. Todistukseen liittyvän kuvan piirtäminen jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Olkoot $A, B \in \ell$, $A \neq B$ (muista (A2)). Tällöin $\measuredangle PAB$ on kulma. Aksiooman (A4) nojalla on olemassa piste Q siten, että $Q * A * P$, jolloin $Q\ell P$ (koska $A \in \ell$).

Aksiooman (A7) avulla kulma $\measuredangle PAB$ voidaan nyt "peilata" suoran ℓ toiselle puolelle: on siis olemassa puolisuora $\overrightarrow{AR}$ siten, että $RQ\ell$ ja $\measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB$. Aksiooman (A6) nojalla piste R voidaan lisäksi valita niin, että $AR \cong AP$.

Koska $RQ\ell$ ja $Q\ell P$, pätee Lauseen 2.5 nojalla $R\ell P$. Suoran eri puolilla olemisen määritelmän mukaan on olemassa piste $C \in \ell$ siten, että $R * C * P$. Nyt pisteen C sijainnille suoralla ℓ on viisi eri vaihtoehtoa:

$$\text{(i) } A * B * C, \ \text{(ii) } C = B, \ \text{(iii) } A * C * B, \ \text{(iv) } C = A \ \text{ tai } \ \text{(v) } C * A * B.$$

Tapauksissa (i), (ii) ja (iii) pätee $C \in \overrightarrow{AB}$, ja siten $\measuredangle PAC = \measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB = \measuredangle RAC$. Koska lisäksi $AP \cong AR$ ja tietysti $AC \cong AC$, soveltuu (SKS)-sääntö, jonka perusteella $\triangle PAC \cong \triangle RAC$. Tällöin erityisesti myös $\measuredangle PCA \cong \measuredangle RCA$. Koska $P * C * R$, ovat nämä lisäksi vieruskulmat, ja siten $\measuredangle PCA$ on suora kulma. Näin ollen $n = \overleftrightarrow{PC}$ on suoran $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ normaali ja $P \in n$, kuten haluttiinkin.

Tapauksessa (iv) saadaan suoraan $\measuredangle PCB = \measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB = \measuredangle RCB$, joten $\measuredangle PCB$ ja $\measuredangle RCB$ ovat yhtenevät vieruskulmat. Siispä $n = \overleftrightarrow{PC}$ on suoran ℓ normaali, kuten edellisessä tapauksessa.

Tapauksessa (v) on siis $C * A * B$, jolloin $\measuredangle PAC$ ja $\measuredangle PAB$ ovat vieruskulmat ja samoin $\measuredangle RAC$ ja $\measuredangle RAB$ ovat vieruskulmat. Koska $\measuredangle PAB \cong \measuredangle RAB$, on Lauseen 3.3 perusteella myös $\measuredangle PAC \cong \measuredangle RAC$. Koska lisäksi $AP \cong AR$ ja $AC \cong AC$, soveltuu jälleen (SKS)-sääntö aivan kuten tapauksissa (i)–(iii). Näin ollen $\triangle PAC \cong \triangle RAC$, joten $\measuredangle PCA \cong \measuredangle RCA$ ovat yhtenevät vieruskulmat ja siten $n = \overleftrightarrow{PC}$ on jälleen suoran ℓ normaali. Tapaus $P \notin \ell$ on loppuun käsitelty.

(2.) Tapaus $P \in \ell$ jätetään harjoitustehtäväksi. Tämä perustuu melko suoraan aksiooman (A7) käyttöön. $\square$

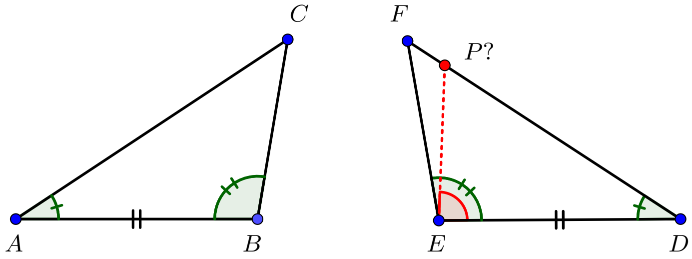
Lauseen 3.5 nojalla pisteen P kautta kulkee siis **ainakin** yksi normaali suoralle ℓ. Voisiko joissain tilanteissa normaaleja olla enemmänkin? Tähän kysymykseen voidaan vastata, kun on edetty vähän pidemmälle geometrian teorian kehittämisessä.

3.3. **Yhtenevyyssääntöjä.** Palataan nyt tutkimaan muita kolmioiden yhtenevyyssääntöjä. Kuten voi odottaa, näiden todistukset perustuvat – tavalla tai toisella – aksioomaan (A8) eli sivu–kulma–sivu -sääntöön.

Lause 3.6 (KSK)**.** *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että*

$$\measuredangle A \cong \measuredangle D, \ \ AB \cong DE \text{ ja } \measuredangle B \cong \measuredangle E.$$

Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

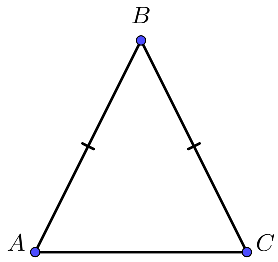


Todistus. Aksiooman (A6) nojalla on yksikäsitteinen piste $P \in \overrightarrow{DF}$ siten, että $DP \cong AC$. Koska lisäksi $DE \cong AB$ ja $\measuredangle EDP = \measuredangle D \cong \measuredangle A = \measuredangle BAC$, on (SKS)-säännön nojalla $\triangle EDP \cong \triangle BAC$. Siten erityisesti $\measuredangle DEP \cong \measuredangle ABC$. Toisaalta oletuksen nojalla $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$, jolloin myös $\measuredangle DEP \cong \measuredangle DEF$ (kaikilla näillä kulmilla on sama astemitta, joten ne ovat myös keskenään yhtenenviä).

Koska $P \in \overrightarrow{DF}$, niin $PF\overleftrightarrow{DE}$. Siten aksiooman (A7) yksikäsitteisyyspuolen nojalla täytyy olla $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EF}$. Erityisesti $P \in \overleftrightarrow{EF}$, ja toisaalta pisteen P valinnan nojalla $P \in \overleftrightarrow{DF}$. Tällöin P on suorien $\overleftrightarrow{DF}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspiste, ja tietysti myös F on suorien $\overleftrightarrow{DF}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspiste. Nämä ovat selvästi eri suorat ($D \notin \overleftrightarrow{EF}$, koska $\triangle DEF$ on kolmio), jolloin niillä voi olla korkeintaan yksi leikkauspiste (Lause 2.1). Siispä täytyy olla $P = F$. Näin ollen $\triangle EDF = \triangle EDP \cong \triangle BAC$, jolloin myös $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. □

Todistetaan ennen seuraavaa yhtenevyyssääntöä hyödyllinen tulos, joka kertoo, että **tasakylkisen** kolmion "kantakulmat" ovat yhtenevät.

Lause 3.7. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $AB \cong BC$. Tällöin $\measuredangle A \cong \measuredangle C$.*



Todistus. Väite seuraa, kun (SKS)-sääntöä käytetään kolmioille $\triangle ABC$ ja $\triangle CBA$ (eri kolmiot!). Näille kolmioille $AB \cong CB$ (oletus), $\measuredangle ABC \cong \measuredangle CBA$ (sama kulma) sekä $BC \cong BA$ (oletus), joten (SKS)-sääntö todella soveltuu. Siispä $\triangle ABC \cong \triangle CBA$, jolloin myös $\measuredangle BAC \cong \measuredangle BCA$ eli $\measuredangle A \cong \measuredangle C$. □

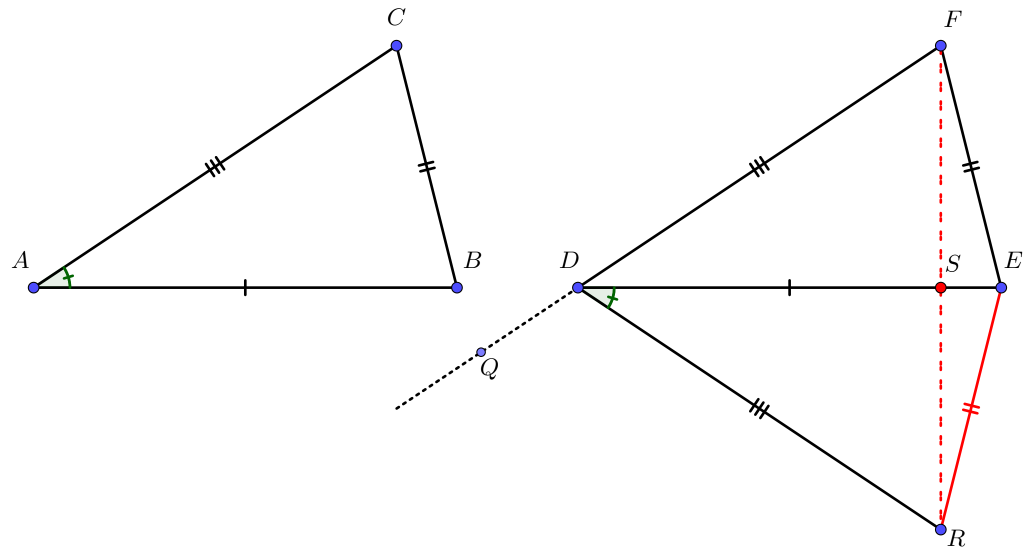
Lauseelle 3.7 pätee myös käänteinen tulos: jos kantakulmat ovat yhtenevät, on kolmio tasakylkinen. Tämän todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Sivu–sivu–sivu -sääntö (SSS) on hyvin oleellinen, koska se kertoo, että kolmio määräytyy täysin sivuistaan eli kolmio on ”jäykkä”. Huomaa, että vastaava tulos ei päde esimerkiksi nelikulmioille! Sääntöä (SSS) tarvitaan usein myös harppi–viivain -konstruktioiden perusteluissa.

Lause 3.8 (SSS)**.** *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että*

$$AB \cong DE,\ BC \cong EF \text{ ja } AC \cong DF.$$

Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



(SSS)-säännön todistuksen tapaus (iii), jossa $D * S * E$

Todistus. Edetään samantapaisella idealla kuin Lauseen 3.5 todistuksessa ja ”kopioidaan” kolmio $\triangle ABC$ kolmion $\triangle DEF$ viereen seuraavasti:

Merkitään $\ell = \overleftrightarrow{DE}$. Aksiooman (A4) nojalla on olemassa piste Q siten, että $Q*D*F$, jolloin $Q\ell F$ (koska $D \in \ell$). Aksiooman (A7) avulla kulma $\measuredangle CAB$ voidaan nyt ”siirtää” kulman $\measuredangle FDE$ viereen; on siis olemassa puolisuora $\overrightarrow{DR}$ siten, että $RQ\ell$ ja $\measuredangle RDE \cong \measuredangle CAB$. Aksiooman (A6) nojalla piste R voidaan lisäksi valita niin, että $DR \cong AC$. Tällöin myös $DR \cong DF$.

Nyt valintojen perusteella $DR \cong AC$ ja $\measuredangle RDE \cong \measuredangle CAB$, ja lisäksi oletuksen nojalla $DE \cong AB$. Näin ollen (SKS)-säännön perusteella $\triangle DER \cong \triangle ABC$. Erityisesti $ER \cong BC$, ja koska oletuksen nojalla $BC \cong EF$, on myös $ER \cong EF$.

Kolmiossa $\triangle DER$ on siis $DR \cong DF$ ja $ER \cong EF$. Käytetään seuraavaksi apuna tasakylkisiä kolmioita, ja osoitetaan, että $\measuredangle DRE \cong \measuredangle DFE$.

Koska $RQ\ell$ ja $Q\ell F$, pätee Lauseen 2.5 nojalla $R\ell F$. Suoran eri puolilla olemisen määritelmän mukaan on olemassa piste $S \in \ell$ siten, että $R * S * F$. Pisteen S sijainnille suoralla ℓ on viisi eri vaihtoehtoa:

$$\text{(i) } D*E*S,\ \text{(ii) } S=E,\ \text{(iii) } D*S*E,\ \text{(iv) } S=D \text{ tai (v) } S*D*E.$$

(ii) Tutkitaan ensin tapaus $S = E$. Koska $R * E * F$, on $\measuredangle DFE = \measuredangle DFR$ ja $\measuredangle DRF = \measuredangle DRE$. Kolmio $\triangle FDR$ on tasakylkinen, joten Lauseen 3.7 nojalla

$$\measuredangle DFE = \measuredangle DFR \cong \measuredangle DRF = \measuredangle DRE.$$

Näin ollen $\measuredangle DRE \cong \measuredangle DFE$, ja koska $DR \cong DF$ ja $ER \cong EF$, soveltuu (SKS)-sääntö ja siten $\triangle DRE \cong \triangle DFE$. Tällöin myös $\triangle DEF \cong \triangle DER \cong \triangle ABC$, joten väite pätee tapauksessa (ii).

(iii) Tutkitaan sitten tapaus $D*S*E$. Nyt pisteet F, D, R eivät ole samalla suoralla eivätkä myöskään pisteet F, E, R, ja koska $DR \cong DF$ ja $ER \cong EF$, ovat kolmiot $\triangle FDR$ ja $\triangle FER$ tasakylkisiä. Siispä Lauseen 3.7 nojalla $\measuredangle DFR \cong \measuredangle DRF$ ja $\measuredangle RFE \cong \measuredangle FRE$. Koska $D * S * E$ ja $R \in \overrightarrow{FS}$, on piste R kulman $\measuredangle DFE$ sisällä; tämän täsmällinen perustelu jätetään harjoitustehtäväksi. Aivan vastaavasti piste F on kulman $\measuredangle DRE$ sisällä. Tällöin (KMA) kohtia (a) ja (b) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}(\measuredangle DFE)^\circ &= (\measuredangle DFR)^\circ + (\measuredangle RFE)^\circ \\ &= (\measuredangle DRF)^\circ + (\measuredangle FRE)^\circ = (\measuredangle DRE)^\circ,\end{aligned}$$

joten $\measuredangle DRE \cong \measuredangle DFE$. Koska $DR \cong DF$ ja $ER \cong EF$, soveltuu (SKS)-sääntö aivan kuten tapauksessa (ii), ja saadaan $\triangle DRE \cong \triangle DFE$. Siispä myös $\triangle DEF \cong \triangle DER \cong \triangle ABC$, joten väite pätee tapauksessa (iii).

Tapaus (i) jätetään harjoitustehtäväksi. Tapaus (iv) on samanlainen, kuin tapaus (ii), ja tapaus (v) on samanlainen, kuin tapaus (i). $\square$

Edellisen säännön seurauksena voidaan osoittaa kulman puolittajien olemassaolo. Määritellään ensin, että puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on **kulman $\measuredangle ABC$ puolittaja**, jos D on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä ja $\measuredangle ABD \cong \measuredangle CBD$.

Lause 3.9. *Jos $\measuredangle ABC$ on kulma, on sillä olemassa puolittaja $\overrightarrow{BD}$.*

Todistus. Kulman puolittajan olemassaolo perustuu siihen, että valitaan ensin $E \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $BE \cong BA$, ja käytetään apuna janan AE keskipistettä. Tarkemmat yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Yhtenevyyssääntöjen avulla voidaan todistaa myös janojen keskinormaaleita koskeva tulos. Janan AB **keskinormaali** on luonnollisesti suora n, jolle pätee $n \perp \overleftrightarrow{AB}$ ja joka kulkee janan AB keskipisteen kautta.

Lause 3.10. *Olkoot $A \neq B$ pisteitä. Tällöin piste P on janan AB keskinormaalilla jos ja vain jos $AP \cong BP$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Huomautus 3.11. Kolmion kolme eri osaa sisältävistä kombinaatioista on nyt saatu yhtenevyyssäännöiksi (SKS), (KSK) ja (SSS). Muita mahdollisuuksia voisivat ainakin periaatteessa olla vielä (SKK), (SSK) sekä (KKK). Ensimmäinen näistä toimiikin, mutta kahta jälkimmäistä vastaavat tilanteet eivät aina takaa kolmioiden yhtenevyyttä. Näihin kolmeen tapaukseen palataan myöhemmin; katso erityisesti Huomautus 6.8.

4. Harppi–viivain -konstruktiot

Perinteisissä geometrisissa konstruktiotehtävissä on tavoitteena saada aikaan haluttu kuvio, kun käytössä on

- **viivain**, jolla voidaan piirtää kahden pisteen kautta kulkeva suora (tai käytännössä tietysti tämän suoran osa), sekä
- **harppi**, jolla voidaan piirtää ympyrä, kun annettuna on ympyrän keskipiste ja säde, joka on kahden pisteen välisen janan pituinen; erityisesti annettuna voi olla keskipiste sekä yksi ympyrän kehän piste.

Harppia käytettäessä ei useinkaan olla kiinnostuneita itse ympyrästä, vaan tämän ympyrän leikkauspisteistä muiden suorien ja ympyröiden kanssa. Perusideana on, että konstruktion aikana syntyvien leikkauspisteiden kautta voidaan jatkossa piirtää uusia suoria tai niitä voidaan käyttää uusien ympyröiden keskipisteinä tai kehän pisteinä. Usein harpin käyttö vastaakin aksioomaa (A6): tietyltä (puoli)suoralta $\overleftrightarrow{AB}$ halutaan löytää piste P, jonka etäisyys pisteestä A on sama kuin joidenkin pisteiden D ja E etäisyys eli janan DE pituus.

Leikkauspisteiden lisäksi alussa annetuilta tai konstruktion aikana piirretyiltä suorilta ja ympyröiltä voidaan valita satunnaisia pisteitä, samoin suorien eri puolilta sekä ympyröiden sisä- ja ulkopuolilta. Oleellista on kuitenkin muistaa, että viivaimella ei voi mitata pisteiden välisiä etäisyyksiä, ainoastaan piirtää suoria.

Harppi ja viivain ovat olleet klassisen tasogeometrian työkaluja antiikin ajoista saakka. Näiden avulla tehdyt konstruktiot olivat oleellinen osa geometrian teorian kehittämistä myös Eukleideen Alkeissa, ja itse asiassa monet Eukleideen alkuperäisistä aksioomista voi tulkita juuri harpin ja viivaimen käyttöön liittyviksi ”säännöiksi”. Esimerkiksi Eukleideen ensimmäinen aksiooma (eli postulaatti) (EA1) vaatii, että kahden pisteen välille voidaan piirtää suora jana ja kolmannessa aksioomassa (EA3) vaaditaan, että mikä tahansa piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka kulkee minka tahansa toisen pisteen kautta.

Pelkkä halutun konstruktion suorittaminen ei kuitenkaan ole tehtävän täydellinen ratkaisu, vaan lisäksi on perusteltava, että saatu kuvio todella toteuttaa vaaditut ominaisuudet. Perusteluissa vedotaan usein esimerkiksi kolmioiden yhtenevyyssääntöihin ja tasasivuisten kolmioiden kantakulmien yhtenevyyteen. Toisaalta konstruktiot eivät ole varsinaisia todistuksia, vaan oikeissa todistuksissa on edelleen turvauduttava aksioomien perusteella tehtäviin päättelyketjuihin.

Otetaan seuraavaksi muutama esimerkki klassisista konstruktioista.

Esimerkki 4.1 (Eukleides, Tehtävä 1.1)**.** On konstruoitava tasasivuinen kolmio, jonka yhtenä sivuna on annettu jana.

(Kolmio $\triangle ABC$ on **tasasivuinen**, jos $AB \cong BC \cong AC$.)

Ratkaisu. Olkoon AB annettu jana.

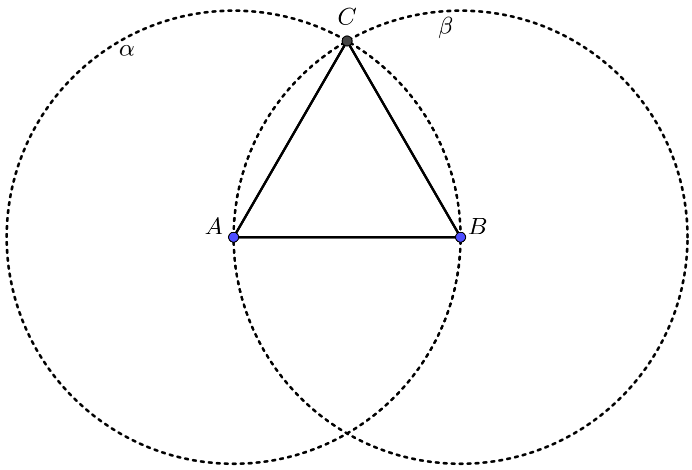
(1) Piirretään A keskipisteenä ympyrä α, joka kulkee pisteen B kautta.

(2) Piirretään B keskipisteenä ympyrä β, joka kulkee pisteen A kautta. Olkoon C ympyröiden α ja β (toinen) leikkauspiste.

(3) Piirretään jana AC.

(4) Piirretään jana BC.

Tällöin AB ja AC ovat saman ympyrän α säteinä yhtä pitkät, ja samoin myös AB ja BC ovat saman ympyrän β säteinä yhtä pitkät. Tällöin myös AC ja BC ovat keskenään yhtä pitkät, joten kolmio $\triangle ABC$ on todella tasasivuinen. ok!



Kaikille konstruktioille voidaan laskea tarvittavien vaiheiden lukumäärä: janan tai suoran piirtäminen kahden pisteen avulla on yksi konstruktiovaihe, samoin ympyrän piirtäminen. Siten edellisen esimerkin konstuktiossa tarvittiin neljä vaihetta. Eri konstruktioille asetetaan joskus leikillisesti "ihannetulos" eli *par* tarvittavien vaiheiden määrälle. Esimerkin 4.1 konstuktiossa ihannetulos 4 on samalla myös ehdoton minimi tarvittaville vaiheille, mutta joissain konstuktioissa voi riittävällä oveluudella päästä myös alle ihannetuloksen.

Käytännössä konstruktioissa ei yleensä kannata piirtää näkyviin koko ympyrän kehää, vaan ainoastaan ne osat, jotka tarvitaan haluttujen leikkauspisteiden määrittämiseen. Tällöin kuvat pysyvät selkeämpinä ja usein myös vähän pienempinä.

Seuraava konstruktio vastaa käytännössä aksiooman (A7) sisältöä.

Esimerkki 4.2 (Oleellisesti Eukleides, Tehtävä 1.23)**.** Annettuna on puolisuora $\overrightarrow{BA}$ ja kulma $\measuredangle DEF$. On konstruoitava piste C siten, että $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.

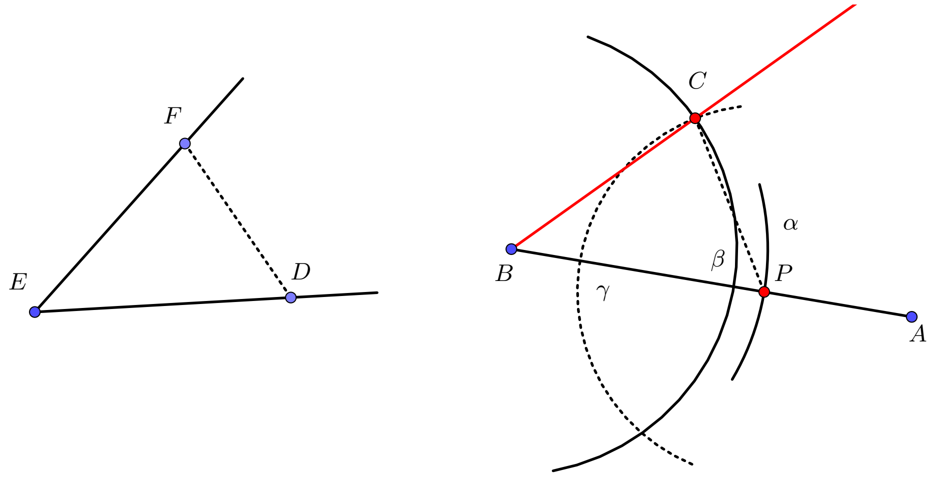
Ratkaisu. (1) Piirretään B keskipisteenä ympyrä α, jonka säde on ED. Olkoon P ympyrän α ja puolisuoran $\overrightarrow{BA}$ leikkauspiste.

(2) Piirretään B keskipisteenä ympyrä β, jonka säde on EF.

(3) Piirretään P keskipisteenä ympyrä γ, jonka säde on DF. Ympyrät β ja γ leikkaavat (kahdessa pisteessä), olkoon C toinen näistä leikkauspisteistä.

(4) Piirretään puolisuora BC.

Tällöin $BC \cong EF$ ja $PC \cong DF$. Koska lisäksi $BP \cong DE$, on (SSS)-säännön nojalla $\triangle PBC \cong \triangle DEF$, joten erityisesti myös $\measuredangle PBC \cong \measuredangle DEF$. Mutta koska $P \in \overrightarrow{BA}$, on $\measuredangle PBC = \measuredangle ABC$, ja siten todella $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$. ok!



Lisää esimerkkejä konstruktioista tulee harjoituksissa, esimerkiksi erilaisten kolmioiden konstruktioita, normaalien ja kulmanpuolittajien konstruktiot, tangenttikonstruktioita sekä säännöllisten monikulmioiden konstruktioita.

Huomautus 4.3. Antiikin Kreikassa törmättiin jo ennen Eukleideen aikaa **kolmeen kuuluisaan konstruktio-ongelmaan**, joille ei lukuisista yrityksitä huolimatta tuntunut löytyvän ratkaisua harpin ja viivaimen avulla. Nämä olivat:

- **Kulman kolmijako**, jossa annettu kulma on jaettava kolmeen yhtäsuureen osaan.
- **Kuution kahdentaminen**, jossa on konstruoitava kuutio, jonka tilavuus on kaksinkertainen annetun kuution tilavuuteen nähden. Käytännössä on siis konstruoitava isomman kuution särmä x, kun pienemmän kuution särmä a tunnetaan; tällöin täytyy olla $x = \sqrt[3]{2}a$.
- **Ympyrän neliöinti**, jossa on konstruoitava neliö, jolla on sama pinta-ala kuin annetulla ympyrällä. Käytännössä on siis konstruoitava tällaisen neliön sivu, kun ympyrän säde tunnetaan.

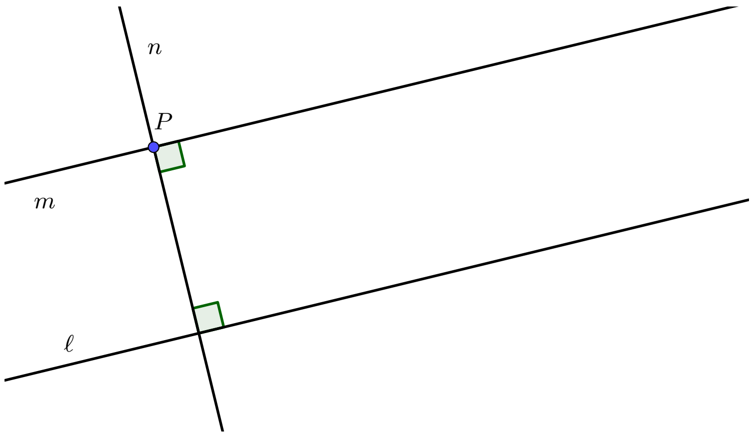
Vasta 1800-luvulla pystyttiin osoittamaan aukottomasti, että nämä konstruktiot ovat todella mahdottomia pelkän harpin ja viivaimen avulla (Pierre Wanzel 1837 kulman kolmijaolle ja kuution kahdentamiselle ja Ferdinand von Lindemann 1882 ympyrän neliöimiselle). On ehkä hieman yllättävää, että näissä mahdottomuustodistuksissa tarvitaan paljon enemmän algebraa kuin geometriaa!

Kannattaa huomata, että kulma voidaan helposti jakaa esimerkiksi kahteen tai neljään yhtä suuren osaan (Harjoitustehtäviä), ja että jokainen jana voidaan jakaa niin moneen yhtä suureen osaan kuin vain halutaan (tämä on harjoitustehtävä vähän myöhemmässä vaiheessa kurssia). Siksi on ehkä hieman yllättävää, että kulman jako kolmeen yhtäsuureen osaan on todella mahdotonta.

Pohditaan luvun lopuksi vielä yhtä konstruktiotehtävää, joka vaikuttaa ihan mahdolliselta:

Esimerkki 4.4 (Eukleides, Tehtävä 1.31)**.** Annettuna on suora ℓ ja piste P, joka ei ole suoralla ℓ. On konstruoitava suora m, joka kulkee pisteen P kautta ja joka ei leikkaa suoraa ℓ.

Ratkaisu? Ideana on konstruoida ensin suoralle ℓ normaali n, jolle $P \in n$, ja tämän jälkeen suoralle n normaali m, joka kulkee pisteen P kautta; nämä konstruktiot ovat harjoitustehtäviä. Tällöin ainakin näyttää siltä, että suorat ℓ ja m eivät leikkaa. Mutta miten tämä voidaan perustella? Tähän ja moniin muihin yhdensuuntaisuuteen liittyviin asioihin perehdytään seuraavassa luvussa.



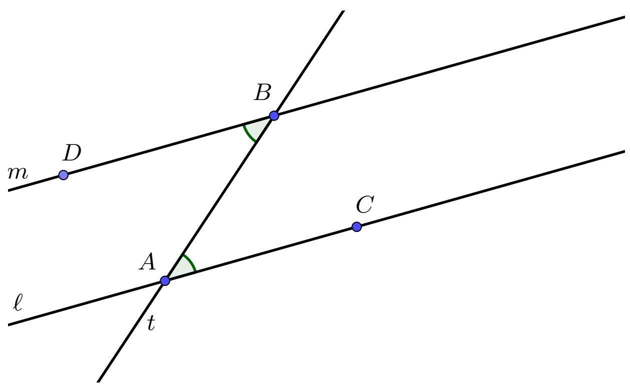
5. Yhdensuuntaisuus

5.1. **Vuorokulmalause ja yhdensuuntaisten suorien olemassaolo.** Muista, että suorilla $\ell \neq m$ on *korkeintaan* yksi leikkauspiste, joten leikkauspisteitä on joko nolla tai yksi.

Määritelmä. Suorat ℓ ja m ovat **yhdensuuntaiset**, jos niillä ei ole leikkauspistettä. Tällöin merkitään $\ell \parallel m$. Jos suorat ℓ ja m leikkaavat, merkitään $\ell \nparallel m$.

Yhdensuuntaisten suorien olemassaolo ja yksikäsitteisyys on erittäin oleellista euklidisessa tasogeometriassa. Aloitetaan tähän liittyvät tutkimukset seuraavalla tärkeällä tuloksella.

Lause 5.1 (Vuorokulmalause)**.** *Olkoot $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ ja $m = \overleftrightarrow{BD}$ eri suoria ja merkitään $t = \overleftrightarrow{AB}$. Oletetaan, että CtD ja että $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$. Tällöin $\ell \parallel m$.*



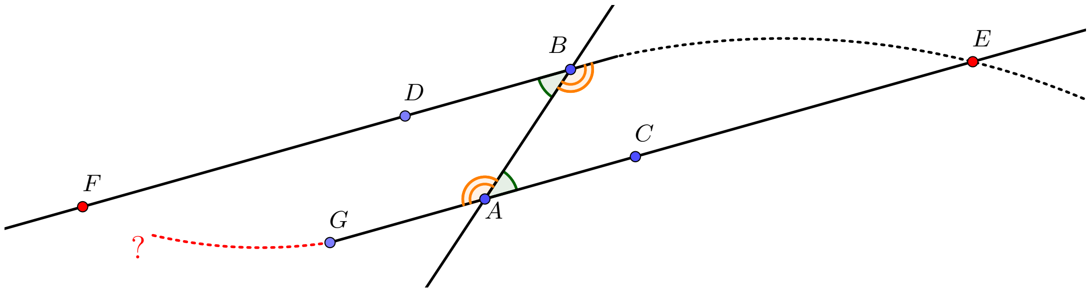
Jos $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$, niin onko $\ell \parallel m$?

Lauseen 5.1 tilanteessa kulmia $\measuredangle CAB$ ja $\measuredangle DBA$ kutsutaan usein **vuorokulmiksi** tai **samankohtaisiksi kulmiksi**.

Todistus. Tehdään **antiteesi:** Suorilla ℓ ja m onkin leikkauspiste E. Voimme lisäksi olettaa, että ECt (jos näin ei ole, niin on EDt, ja todistus menee vastaavasti kun vain vaihdetaan $C \leftrightarrow D$). Koska $E \in \overleftrightarrow{AC}$ ja ECt, niin täytyy olla $E \in \overrightarrow{AC}$ (koska $A \in t$).

Valitaan aksiooman (A6) nojalla piste $F \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $AE \cong BF$. Koska lisäksi $\measuredangle BAE = \measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD = \measuredangle ABF$ (oletus) ja $BA \cong AB$ (sama jana), niin (SKS)-säännön perusteella $\triangle BAE \cong \triangle ABF$, joten erityisesti $\measuredangle ABE \cong \measuredangle BAF$.

Koska CtD ja ECt, niin EtD (Lause 2.5), ja koska FDt (sillä $F \in \overrightarrow{BD}$, $B \in t$), on myös EtF (Lause 2.5). Suorien $m = \overleftrightarrow{EF}$ ja t ainoa leikkauspiste on B, joten täytyy olla $E{*}B{*}F$, ja siten $\measuredangle ABE$ on kulman $\measuredangle ABF = \measuredangle ABD$ vieruskulma. Toisaalta jos valitaan piste G siten, että $G*A*C$ (A4), niin $\measuredangle BAG$ on kulman $\measuredangle BAC$ vieruskulma. Oletuksen nojalla $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$, jolloin myös näiden vieruskulmat ovat yhtenevät eli $\measuredangle BAG \cong \measuredangle ABE$ (Lause 3.3). Aiemmin todettiin, että $\measuredangle ABE \cong \measuredangle BAF$, jolloin myös $\measuredangle BAG \cong \measuredangle BAF$. Koska GFt (sillä FDt, DtC ja GtC), täytyy tällöin aksiooman (A7) yksikäsitteisyysosan perusteella olla $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF}$, joten erityisesti



Antiteesin seurauksena saadaan, että $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF}$

$F \in \overleftrightarrow{AG} = \overleftrightarrow{AC} = \ell$. Mutta pisteen F valinnan nojalla $F \in \overleftrightarrow{BD} = m$, joten F on suorien ℓ ja m leikkauspiste; muista että myös E oli näiden suorien leikkauspiste. Lisäksi pätee EtF, joten välttämättä $E \neq F$, ja siten eri suorilla m ja ℓ on kaksi leikkauspistettä, mikä on Lauseen 2.1 perusteella ristiriita.

Antiteesi johti ristiriitaan, joten suorilla ℓ ja m ei voi olla leikkauspistettä eli todella $\ell \parallel m$, kuten haluttiin. □

Seuraavat tulokset ovat vuorokulmalauseen helppoja seurauksia:

Lause 5.2. *Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa (ainakin yksi) suora, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 5.3 (Normaalin olemassaolo, osa 2)**.** *Olkoon ℓ suora ja P mikä tahansa piste. Tällöin on olemassa* **täsmälleen yksi** *suora n siten, että $P \in n$ ja $n \perp \ell$.*

Todistus. Normaalin olemassaolo on todistettu Lauseessa 3.5.

Tapauksessa $P \in \ell$ normaalin yksikäsitteisyys seuraa aksiooman (A7) yksikäsitteisyysosasta sekä siitä, että kulma on suora kulma täsmälleen silloin, kun sen astemitta on 90 (Lause 3.1).

Tapauksessa $P \notin \ell$ yksikäsitteisyys seuraa puolestaan vuorokulmalauseesta 5.1; tarkempi perustelu jätetään harjoitustehtäväksi. □

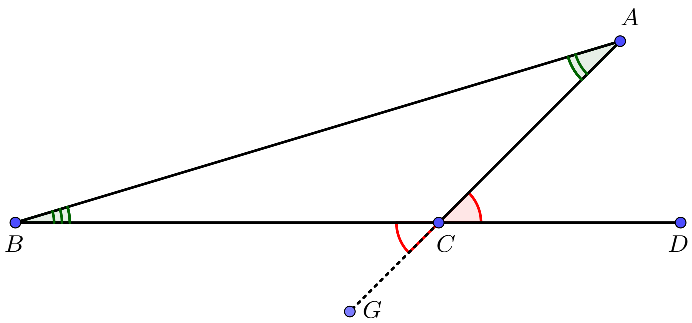
Lauseen 5.3 nojalla pisteen P kautta kulkee siis aina yksikäsitteinen normaali suoralle ℓ. Toisaalta Lauseessa 5.2 on osoitettu, että pisteen $P \notin \ell$ kautta kulkee ainakin yksi suoran ℓ kanssa yhdensuuntainen suora m. Nyt herää kysymys: Onko myös tämä yhdensuuntainen suora yksikäsitteinen, vai voisiko pisteen P kautta kulkea useampia eri suoria, jotka eivät leikkaa suoraa ℓ? Osoittautuu, että tämä on koko Euklidisen tasogeometrian kannalta erittäin ratkaiseva kysymys. Siksi on ehkä vähän yllättävääkin, että tähän kysymykseen ei voi saada vastausta vain tähän mennessä esiintyneiden aksioomien ja lauseiden perusteella, vaan yhdensuuntaisten suorien yksikäsitteisyys täytyy muotoilla omaksi aksioomakseen, joka otetaan käyttöön Luvussa 5.3. Ennen tätä käsitellään kuitenkin vielä muutamia kolmiohin liittyviä epäyhtälöitä, joiden todistukset eivät vaadi tietoa yhdensuuntaisten suorien yksikäsitteisyydestä.

5.2. **Geometrisia epäyhtälöitä.** Tässä luvussa todistetaan erilaisia kolmion kulmien suuruuksiin ja sivujen pituuksiin liittyviä epäyhtälöitä, jotka perustuvat vuorokulmalauseen 5.1 antamaan tulokseen. Seuraavat **ulkokulmaepäyhtälöt** saadaan hyvin suoraan Lauseen 5.1 avulla.

Lause 5.4. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $B * C * D$. Tällöin*

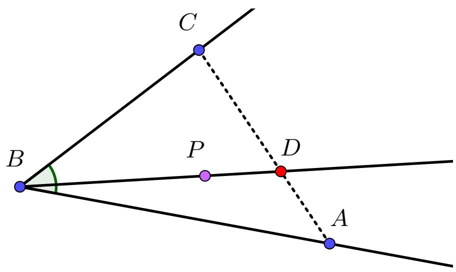
$$\measuredangle BAC < \measuredangle ACD \quad \text{ja} \quad \measuredangle ABC < \measuredangle ACD.$$

Toisin sanoen, kolmion kulmat pisteissä A ja B ovat molemmat pienempiä, kuin kolmion "ulkokulma" pisteessä C.



Ulkokulmaepäyhtälön todistuksessa tarvitaan seuraavan aksiooman antamaa tietoa. Itse asiassa tämä "aksiooma" voitaisiin todistaa välissäolon ominaisuuksien ja aksiooman (A5) avulla, jolloin saadaan niin sanottu Puomilause. Tämä vaatii kuitenkin hieman työtä, ja me tyydymme ottamaan puomilauseen sisällön käyttöön aksioomana.

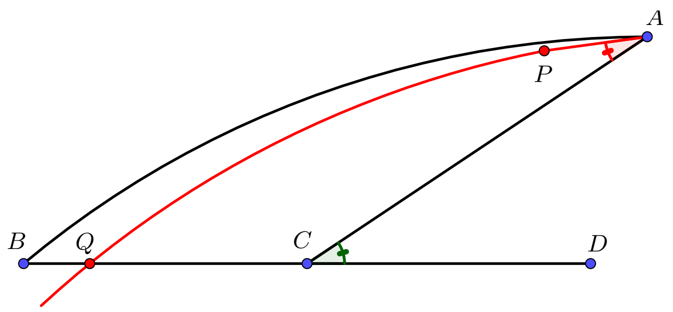
(A9) ("Puomilause") Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja olkoon piste P kulman $\measuredangle ABC$ sisällä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AC eli on piste $D \in \overrightarrow{BP}$ siten, että $A * D * C$.



Lauseen 5.4 todistus. Todistetaan ensin väite $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$, joka on Lemman 3.2 nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $(\measuredangle BAC)^\circ < (\measuredangle ACD)^\circ$. Tehdään **antiteesi**, että tämä ei pädekään, jolloin joko (i) $(\measuredangle BAC)^\circ = (\measuredangle ACD)^\circ$ tai (ii) $(\measuredangle BAC)^\circ > (\measuredangle ACD)^\circ$.

(i) Tässä tapauksessa siis $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD$. Koska oletuksen nojalla $B\overleftrightarrow{AC}D$, soveltuu vuorokulmalause 5.1 ja siten $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{BC}$. Kuitenkin B on näiden suorien leikkauspiste, mikä siis on ristiriita. Näin ollen tämä tapaus ei ole mahdollinen.

(ii) Nyt $\measuredangle BAC > \measuredangle ACD$ (Lemma 3.2), joten kulman $\measuredangle BAC$ sisällä on piste P siten, että $\measuredangle PAC \cong \measuredangle ACD$; tällöin siis $P\overleftrightarrow{BAC}$. Lisäksi aksiooman (A9) perusteella puolisuoralla $\overrightarrow{AP}$ on piste Q siten, että $B * Q * C$. Mutta koska $\measuredangle PAC \cong \measuredangle ACD$ ja $P\overleftrightarrow{AC}D$ (sillä $B\overleftrightarrow{AC}D$ ja $PB\overleftrightarrow{AC}$; Lause 2.5), soveltuu jälleen vuorokulmalause 5.1 ja saadaan, että $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $Q \in \overrightarrow{AP} \subset \overleftrightarrow{AP}$ ja toisaalta $Q \in \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CD}$. Siispä tämäkään tapaus ei ole mahdollinen. Tapaukset (i)



Antiteesin seurauksena $\measuredangle PAC \cong \measuredangle ACD$, joten $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (??)

ja (ii) eivät siis voi tulla kyseeseen, joten antiteesi ei voi pitää paikkaansa. Täytyy siis olla $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$.

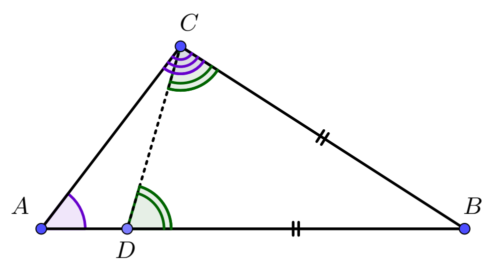
Todistetaan sitten väite $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$. Valitaan piste G, jolle pätee $A * C * G$ (A4). Todistuksen alkuosa soveltuu nyt kulmiin $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle BCG$, joten $\measuredangle ABC < \measuredangle BCG$. Toisaalta ristikulmina $\measuredangle BCG \cong \measuredangle ACD$, joten väite $\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$ seuraa. □

Ulkokulmaepäyhtälön avulla voidaan todistaa esimerkiksi (SKK)-yhtenevyyssääntö kolmioille; tämä jätetään harjoitustehtäväksi. Myös seuraavan tuloksen todistuksessa tarvitaan ulkokulmaepäyhtälöä.

Lause 5.5. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

$$BC < AB \quad \text{jos ja vain jos} \quad \measuredangle A < \measuredangle C.$$

Toisin sanoen, kolmiossa pidempää sivua vastassa on aina suurempi kulma, ja sama pätee myös kääntäen.



Todistuksen idea: $\measuredangle A < \measuredangle BDC \cong \measuredangle BCD < \measuredangle C$

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan siis, että $BC < AB$. Tällöin on olemassa piste D siten, että $B * D * A$ ja $BD \cong BC$, joten kolmio $\triangle CBD$ on tasakylkinen. Lauseen 3.7 nojalla $(\measuredangle BCD)^\circ = (\measuredangle BDC)^\circ$.

Toisaalta koska $B * D * A$, on piste D kulman $\measuredangle BCA$ sisällä, ja siten $(\measuredangle BCD)^\circ < (\measuredangle BCA)^\circ$ (kulmien vertailun määritelmä ja Lemma 3.2). Lisäksi ulkokulmaepäyhtälö 5.4 sovellettuna kolmioon $\triangle ADC$ antaa, että $(\measuredangle BDC)^\circ > (\measuredangle DAC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ$.

Edelliset (epä)yhtälöt yhdistämällä saadaan

$$(\measuredangle BAC)^\circ < (\measuredangle BDC)^\circ = (\measuredangle BCD)^\circ < (\measuredangle BCA)^\circ,$$

joten todella $\measuredangle A = \measuredangle BAC < \measuredangle BCA = \measuredangle C$. ok!

"$\Leftarrow$" Nyt siis oletetaan, että $\measuredangle BAC < \measuredangle BCA$, jolloin $(\measuredangle BAC)^\circ < (\measuredangle BCA)^\circ$ (Lemma 3.2). Tehdään **antiteesi**, että ei päde $BC < AB$ (eli $|BC| < |AB|$), jolloin joko (i) $|BC| = |AB|$ tai (ii) $|BC| > |AB|$.

Tapauksessa (i) kolmio $\triangle ABC$ on tasakylkinen, jolloin Lauseen 3.7 perusteella $(\measuredangle BAC)^\circ = (\measuredangle BCA)^\circ$, mikä on vastoin oletusta.

Tapauksessa (ii) voimme puolestaan soveltaa jo todistettua suuntaa "$\Rightarrow$", jonka perusteella $(\measuredangle BAC)^\circ > (\measuredangle BCA)^\circ$. Tämä on jälleen vastoin oletusta.

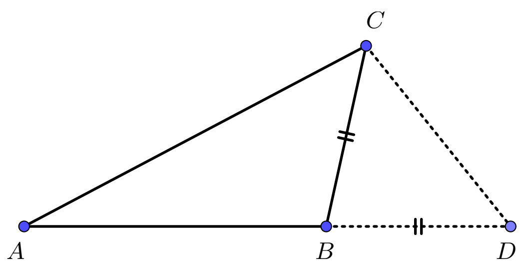
Molemmat tapaukset johtavat ristiriitaan, joten täytyy siis olla $BC < AB$. $\square$

Nyt voidaan todistaa myös klassinen geometrinen **kolmioepäyhtälö**.

Lause 5.6 (Kolmioepäyhtälö)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

Toisin sanoen, kolmiossa yhden sivun pituus on aina pienempi, kuin kahden muun sivun pituuksien summa.



Todistus. Ideana on soveltaa Lausetta 5.5 oheisen kuvan kolmioon $\triangle ACD$; tarkka perustelu on harjoitustehtävä. $\square$

Kirjataan tämän luvun lopuksi vielä kolmion kahden kulman summaan liittyvä epäyhtälö, joka on hyvin suora seuraus ulkokulmaepäyhtälöstä.

Lause 5.7. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ < 180$.*

Todistus. Valitaan piste D siten, että $A * B * D$. Tällöin ulkokulmaepäyhtälön eli Lauseen 5.4 nojalla $\measuredangle A = \measuredangle BAC < \measuredangle CBD$. Toisaalta $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle CBD$ ovat vieruskulmat, ja siten kulmamitta-aksiooman (KMA) sekä Lemman 3.2 perusteella

$$(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ < (\measuredangle CBD)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ = 180,$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Huomautus 5.8. Lause 5.7 siis sanoo, että kolmiossa kahden kulman astemittojen summa on aina alle 180. Toisaalta on "tunnettua", että kolmion kaikkien kulmien astemittojen summa on tasan 180, joten eikö Lauseen 5.7 tulos ole vain yksinkertainen seuraus tästä "tunnetusta" tuloksesta?

Tässä yhteydessä täytyy tietysti muistaa, että emme ole vielä **todistaneet**, että kolmion kulmasumma on 180. Itse asiassa osoittautuu, että tämä ei välttämättä ole edes totta geometriassa, joka toteuttaa tähän mennessä käyttöön ottamamme aksioomat. Paras tulos, joka näiden aksioomien pohjalta voitaisiin kolmion kulmasummiin liittyen todistaa, on niin sanottu **Saccherin ja Legendren lause**, joka sanoo, että kolmiossa $\triangle ABC$ on $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ \leq 180$. Tähän tulokseen päätyivät (toisistaan riippumatta) italialainen Giovanni Saccheri ja ranskalainen Ardien-Marie Legendre 1700-luvulla samalla, kun he **yrittivät todistaa**, että pisteen $P \notin \ell$ kautta kulkee **täsmälleen** yksi suoran ℓ kanssa yhdensuuntainen suora.

Toisaalta jos tiedetään yhdensuuntaisten suorien yksikäsitteisyys, on kohtuullisen helppo todistaa kolmion kulmien summaksi 180 (katso Lause 5.12). Nämä kaksi asiaa liittyvät siis hyvin läheisesti yhteen. Yli 2000 vuoden ajan lukuisat matemaatikot yrittivät todistaa näitä tuloksia oleellisesti sen teorian pohjalta, mihin mekin olemme tähän mennessä kurssia edenneet. Viimein 1800-luvun kuluessa ymmärrettiin, että tämä on mahdotonta: kehitettiin niin sanottu **hyperbolinen geometria**, jossa pisteen $P \notin \ell$ kautta kulkee useita suoran ℓ kanssa yhdensuuntaisia suoria ja jossa kolmioissa kulmien astemittojen summa on aina aidosti alle 180. Hyperboliselle geometrialle annettiin myös konkreettisia malleja, esimerkiksi niin sanottu **Poincarén kiekkomalli**, jotka osoittavat, että hyperbolinen geometria aivan yhtä ristiriidatonta kuin tuttu euklidinen geometria. (Ranskalainen Henri Poincaré oli yhdessä David Hilbertin kanssa 1800- ja 1900-lukujen vaihteen tärkeimpiä matemaatikoita.)

Jos siis haluamme **todistaa**, että kolmion kulmien summa on 180, täytyy meidän (tavalla tai toisella) **olettaa** yhdensuuntaisten suorien yksikäsitteisyys. Tätä varten otamme järjestelmäämme mukaan vielä yhden aksiooman, **paralleeliaksiooman**.

5.3. **Paralleeliaksiooma ja seurauksia.** Koska Lauseessa 5.2 on todettu, että pisteen $P \notin \ell$ kautta kulkee **ainakin** yksi suora, joka on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa, riittää yksikäsitteisen yhdensuuntaisen olemassaoloa varten olettaa seuraava versio paralleeliaksioomasta.

> **(PA)** Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa **korkeintaan** yksi suora, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.

Huomautus 5.9. Eukleiden Alkeissa yksikäsitteisen yhdensuuntaisen olemassaolo ratkaistiin seuraavan postulaatin (eli "Eukleideen 5. aksiooman") avulla:

(EA5) Olkoot $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ ja $m = \overleftrightarrow{BD}$ eri suoria ja merkitään $t = \overleftrightarrow{AB}$. Oletetaan, että CDt ja että $(\measuredangle CAB)^\circ + (\measuredangle ABD)^\circ < 180$. Tällöin $\ell \nparallel m$, ja suorien ℓ ja m leikkauspisteelle P pätee, että PCt.

Voidaan osoittaa, että geometriassa, jossa on voimassa muut aksioomamme eli (A1)–(A9) sekä (JMA) ja (KMA), ovat paralleeliaksiooma ja Eukleideen 5. aksiooma yhtäpitäviä, toisin sanoen (PA) $\Longleftrightarrow$ (EA5).

Paralleeliaksioomalla on erittäin paljon tärkeitä seurauksia. Esimerkiksi pätee:

Lause 5.10. *Olkoot ℓ, m ja n eri suoria.*

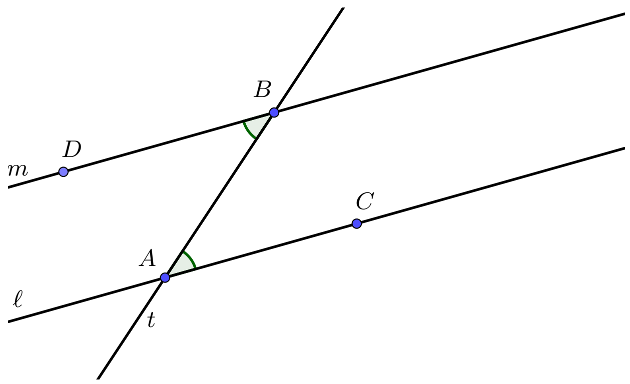
(a) Jos $\ell \parallel m$ ja $m \parallel n$, niin myös $\ell \parallel n$.

(b) Jos $\ell \parallel m$ ja $m \nparallel n$, niin myös $\ell \nparallel n$. Toisin sanoen, jos suora n leikkaa toista yhdensuuntaisista suorista ℓ ja m, leikkaa se toistakin.

Todistus. Harjoitustehtävä. (Antiteesi voi olla hyvä tapa aloittaa todistus.) □

Paralleeliaksioomasta saadaan helposti myös käänteinen suunta Lauseen 5.1 tulokselle.

Lause 5.11 (Käänteinen vuorokulmalause)**.** *Olkoot $\ell = \overleftrightarrow{AC}$ ja $m = \overleftrightarrow{BD}$ eri suoria ja merkitään $t = \overleftrightarrow{AB}$. Oletetaan, että CtD ja että $\ell \parallel m$. Tällöin $\measuredangle CAB \cong \measuredangle DBA$.*



Jos $\ell \parallel m$, niin onko $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$?

Todistus. Tehdään **antiteesi**, että ei päde $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$, jolloin siis $(\measuredangle BAC)^\circ \neq (\measuredangle ABD)^\circ$. Voidaan olettaa, että tällöin $(\measuredangle BAC)^\circ < (\measuredangle ABD)^\circ$; tapaus $(\measuredangle BAC)^\circ > (\measuredangle ABD)^\circ$ käsitellään aivan vastaavasti.

Nyt siis $\measuredangle BAC < \measuredangle ABD$ (Lemma 3.2), joten kulman $\measuredangle ABD$ sisällä on piste P siten, että $\measuredangle ABP \cong \measuredangle BAC$. Koska P on kulman $\measuredangle ABD$ sisällä, on erityisesti $PD\overleftrightarrow{AB}$, ja koska oletuksen nojalla $D\overleftrightarrow{AB}C$, on myös $P\overleftrightarrow{AB}C$ (Lause 2.5). Tällöin vuorokulmalauseen 5.1 oletukset ovat voimassa suorille $\overleftrightarrow{BP}$ ja $\overleftrightarrow{AC}$, ja näin ollen $\overleftrightarrow{BP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.

Toisaalta oletuksen nojalla myös $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Koska $P \notin \overleftrightarrow{BD}$, on $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{BD}$, ja siten pisteen B kautta kulkee kaksi eri yhdensuuntaista suoraa suoralle $\ell = \overleftrightarrow{AC}$. Tämän on kuitenkin ristiriita paralleeliaksiooman (PA) nojalla. Siispä täytyy olla $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABD$, kuten haluttiinkin. □

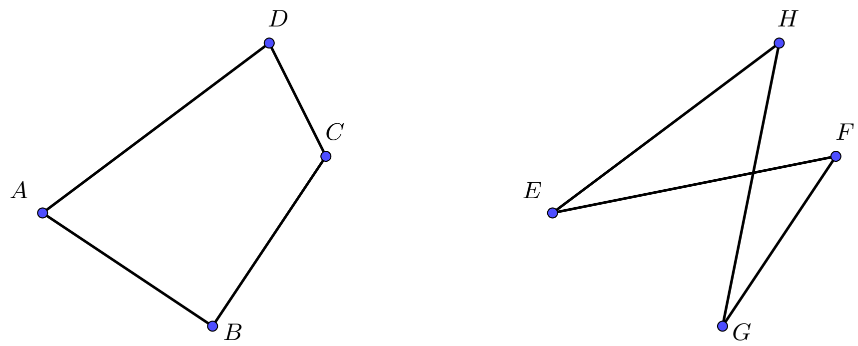
Käänteisellä vuorokulmalauseella on useita erittäin tärkeitä seurauksia, esimerkiksi tuttu ja hyvin tarpeellinen kolmion kulmasummalause.

Lause 5.12. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ = 180$.*

Todistus. Idea: Olkoon suora ℓ siten, että $C \in \ell$ ja $\ell \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Väite seuraa käänteisestä vuorokulmalauseesta 5.11 sekä kulmamitan ominaisuuksista; yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Toistaiseksi olemme käsitelleet monikulmioista vain kolmioita. Tulemme jatkossa tarvitsemaan myös nelikulmioita sekä tiettyjen nelikulmioiden perusominaisuuksia, joten esitetään tässä vaiheessa täsmällisiä määritelmiä:

Määritelmä. Olkoot A, B, C, D eri pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Jos $AB \cap CD = \emptyset$ ja $BC \cap AD = \emptyset$, nämä pisteet määräävät **nelikulmion** $\square ABCD$. (Kuten kolmiolle, myös tässä merkinnässä pisteiden järjestys on oleellinen, joten voidaan ajatella, että nelikulmio on itse asiassa järjestetty pistenelikko.) Pisteet A, B, C ja D ovat nelikulmion $\square ABCD$ **kärjet**, janat AB, BC, CD ja $DA = AD$ ovat sen **sivut** ja kulmat $\measuredangle DAB$, $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, ja $\measuredangle CDA$ ovat tämän nelikulmion kulmat.



$\square ABCD$ on nelikulmio, mutta $\square EFGH$ ei ole nelikulmio

Muut monikulmiot voidaan määritellä vastaavaan tapaan, kun vain vaaditaan etteivät sivut leikkaa toisiaan (paitsi vierekkäiset sivut päätepisteissään). Nelikulmioita ja muitakin monikulmioita voidaan hyvin käsitellä ilman paralleeliaksioomaa, mutta tällöin esimerkiksi monet tärkeät suunnikkaiden ominaisuudet eivät ole voimassa.

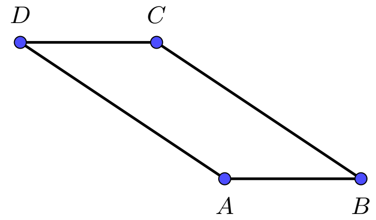
Määritelmä. (a) Nelikulmio $\square ABCD$ on **suunnikas**, jos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

(b) Nelikulmio $\square ABCD$ on **suorakulmio**, jos sen kaikki kulmat ovat suoria kulmia.

(c) Nelikulmio $\square ABCD$ on **neliö**, jos sen kaikki kulmat ovat suoria kulmia ja kaikki sivut ovat yhteneviä.

Huomaa, että vuorokulmalauseen 5.1 nojalla suorakulmio on erityisesti myös suunnikas.

Suunnikkaassa on siis kaksi paria yhdensuuntaisia sivuja. **Puolisuunnikas** on puolestaan nelikulmio, jossa yhdet vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, esimerkiksi $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Suunnikkaan määritelmästä seuraa paljon muita hyödyllisiä ominaisuuksia, esimerkiksi, että vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja vastakkaiset kulmat yhtä suuria.



Suunnikas $\square ABCD$

Lause 5.13. *Olkoon $\square ABCD$ suunnikas. Tällöin*

$$\measuredangle DAB \cong \measuredangle BCD \quad \text{ja} \quad \measuredangle ABC \cong \measuredangle CDA$$

sekä

$$AB \cong CD \quad \text{ja} \quad BC \cong AD.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. Käänteinen vuorokulmalause 5.11 sekä yhtenevyyssäännöt ovat varmasti tarpeen. □

5.4. **Yhteenvetoa aksioomista.** Tähän päättyy kurssin ensimmäinen puolikas, jonka aikana on esitelty tarpeelliset aksioomat sekä rakennettu geometrian perusteita näiden pohjalta. Kannattaa huomata, että tämä on monen asian suhteen se taso, jolta esimerkiksi lukion geometrian kurssi alkaa: siellä oletetaan ”tunnetuiksi” pisteiden, suorien, janojen ja kulmien perusominaisuudet, kuten janojen ja kulmien mittaaminen, normaalien ja yhdensuuntaisten suorien olemassaolo sekä vuorokulmalauseet.

Aksioomia on lopulta kertynyt aika paljon, ja ehkä tässä kohdassa on hyvä pohtia hetki, ovatko ne kaikki todella tarpeellisia. Kerrataan siis vielä lopulliset aksioomamme hieman ryhmitellen:

(1) Ensimmäiset aksioomat olivat sisällöltään hyvin yksinkertaisia, mutta erityisesti nämä takaavat, että on olemassa pisteitä ja suoria ja että kaksi pistettä määrää aina yksikäsitteisen suoran. Jos jonkun näistä aksioomista jättäisi pois, muuttaisi se geometriaa merkittävällä tavalla.

(A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora ℓ siten, että $P \in \ell$ ja $Q \in \ell$.

(A2) Jokaisella suoralla on ainakin kaksi eri pistettä.

(A3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

(2) Seuraavissa aksioomissa käsiteltiin pisteiden järjestystä suorilla sekä sijaintia suorien suhteen. Aksiooma (A4) takaa, että suorilla ei ole loppupisteitä tai tyhjiä kohtia ja että pisteet ovat suorilla yksikäsitteisessä järjestyksessä. Aksiooma (A5) puolestaan kertoo oleellisesti, että taso on todella ”litteä” ja että jokainen suora jakaa tason täsmälleen kahteen osaan. Näiden kanssa samaan ryhmään kuuluu myös (A9), joka siis kyllä pystyttäisiin todistamaan muiden aksioomien pohjalta, mutta joka otetaan tällä kurssilla aksioomaksi lähinnä mukavuussyistä.

(A4) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että

$$C * A * B,\ A * D * B \ \text{ ja } \ A * B * E.$$

Jos lisäksi A, B ja C ovat suoran ℓ eri pisteitä, niin **täsmälleen** yksi seuraavista on voimassa:

$$C * A * B,\ A * C * B \ \text{ tai } \ A * B * C.$$

(A5) Olkoon ℓ suora ja olkoot A, B, C pisteitä, jotka eivät ole suoralla ℓ.
(a) Jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$.
(b) Jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

(A9) ("Puomilause") Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja olkoon piste P kulman $\measuredangle ABC$ sisällä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AC eli on piste $D \in \overrightarrow{BP}$ siten, että $A * D * C$.

(3) Janojen yhtenevyyteen ja mittaamiseen liittyvät aksioomat ovat luonnollisesti myös välttämättömiä. Janamitan olemassaolo pystyttäisiin siis kyllä perustelemaan myös geometrisesti, mutta tällöin meidän pitäisi ottaa järjestelmäämme janamitta-aksiooman (JMA) sijasta vielä muita janojen yhtenevyyteen liittyviä aksioomia.

(A6) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

(JMA) Jokaisella janalla AB on **pituus** $|AB| > 0$ siten, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:
(a) $AB \cong CD \iff |AB| = |CD|$
(b) $A * B * C \iff |AC| = |AB| + |BC|$
(c) Jos $r \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$, niin on olemassa pisteet P ja Q siten, että $|PQ| = r$.

(4) Aivan vastaavasti tarvitaan välttämättä myös kulmien yhtenevyyteen ja mittaamiseen liittyvät aksioomat.

(A7) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

(KMA) Jokaisella kulmalla $\measuredangle ABC$ on **astemitta** $0 < (\measuredangle ABC)^\circ < 180$ siten, että

(a) $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
(b) Jos piste D on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä, niin
$$(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$$
(c) Vieruskulmien astemittojen summa on 180.

(5) Yhteys janojen ja kulmien yhtenevyyden välille saadaan (SKS)-säännöstä, joka takaa myös sen, että taso näyttää joka puolella samanlaiselta. Ilman (SKS)-sääntöä (tai sisällöltään vastaavaa aksioomaa) ei muitakaan yhtenevyyssääntöjä pysty todistamaan, ja siten kaikki kolmioiden käyttöön liittyvät tulokset ovat mahdottomia ilman tätä aksioomaa.

(A8) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että
$$AB \cong DE, \ \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ ja } BC \cong EF.$$
Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(6) Lopuksi tarvitsemme vielä paralleeliaksiooman, jotta geometriamme on todella euklidista. Hyperbolisen geometrian olemassaolo kertoo, että paralleeliaksiooman väitettä ei ole mahdollista todistaa muiden aksioomien pohjalta, ja siksi se on otettava mukaan aksioomana.

(PA) Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa **korkeintaan** yksi suora, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.

Kurssin jälkimmäisellä puoliskolla pääsemme hyödyntämään tehokkaasti näiden aksioomien avulla rakentamaamme teoriaa. Tutkimme kolmioiden yhdenmuotoisuutta sekä tämän sovelluksena trigonometriaa. Tutustumme lähemmin myös ympyröihin ja todistamme näihin liittyen esimerkiksi ympyröiden tangenttien ominaisuuksia sekä kehäkulmalauseita, jotka ovat erittäin hyödyllisiä monissa geometrian sovelluksissa. Lopuksi käsittelemme vielä niin sanottuja kolmioiden merkillisiä pisteitä.

Tulemme tarvitsemaan jatkossa suurta osaa tähän mennessä todistetuista tuloksista. Kaikkein keskeisimpiä jatkon kannalta ovat kuitenkin kolmioiden yhtenevyyssäännöt (SKS) ja (SSS), vuorokulmalauseet 5.1 ja 5.11 sekä kolmion kulmasummalause 5.12.

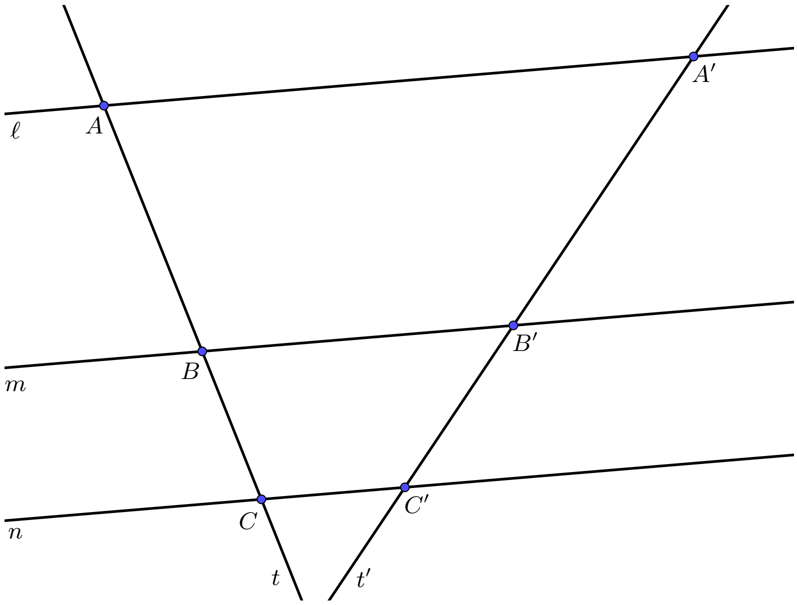
6. Yhdenmuotoisuus

Tässä luvussa päätarkoituksena on todistaa yhdenmuotoisiin kolmioihin liittyviä tuloksia, jotka ovat aivan keskeisiä tasogeometrian sovelluksissa ja joita tarvittiin esimerkiksi kurssin alussa esitetyssä Pythagoraan lauseen todistuksessa. Nämä tulokset pohjautuvat paralleeliaksioomaan ja sen seurauksiin. Erityisesti apuna tarvitaan niin sanottua yhdensuuntaisprojektiolausetta, johon tutustutaan ensin.

6.1. **Yhdensuuntaisprojektiot.**

Lause 6.1. *Olkoot ℓ, m ja n eri suoria, jotka ovat keskenään yhdensuuntaisia. Olkoot lisäksi t ja t' eri suoria, jotka leikkaavat suoria ℓ, m ja n pisteissä A, B, C sekä A', B', C' (vastaavassa järjestyksessä), ja että $A * B * C$. Tällöin*

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$



Todistus. Koska $A * B * C$, niin täytyy olla myös $A' * B' * C'$ (harjoitustehtävä).

Jaetaan todistus kolmeen tapaukseen:

$$\textbf{(a)}\ \frac{|AB|}{|BC|} = 1, \qquad \textbf{(b)}\ \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \qquad \text{ja} \qquad \textbf{(c)}\ \frac{|AB|}{|BC|} \notin \mathbb{Q}.$$

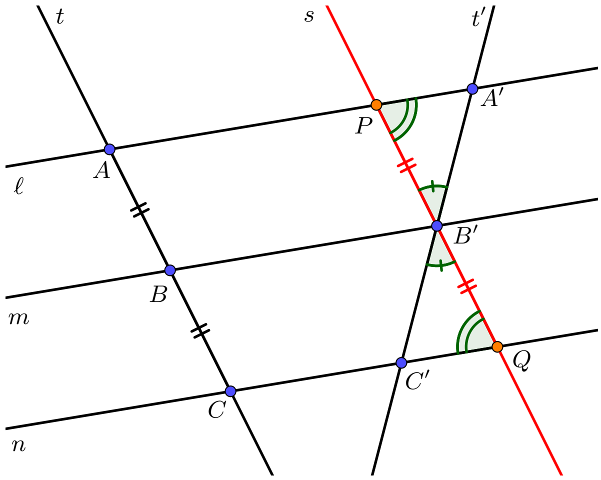
(a) Nyt siis $|AB| = |BC|$.

Jos lisäksi pätee, että $t \parallel t'$, niin $\square AA'B'B$ ja $\square BB'C'C$ ovat suunnikkaita, jolloin Lauseen 5.13 nojalla $|AB| = |A'B'|$ ja $|BC| = |B'C'|$. Näin ollen

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|},$$

kuten haluttiinkin.

Oletetaan sitten, että $t \nparallel t'$. Valitaan Lauseen 5.2 nojalla suora s siten, että $B' \in s$ ja $s \parallel t$. Lauseen 5.10 (b)-kohdan perusteella suora s leikkaa myös suoria ℓ ja n, olkoot nämä leikkauspisteet $P \in \ell$ ja $Q \in n$. Tällöin pätee $P * B' * Q$ (tämä osoitetaan samoin kuin todistuksen alun väite $A' * B' * C'$).



Nyt $\square APB'B$ ja $\square BB'QC$ ovat suunnikkaita, jolloin Lauseen 5.13 ja oletuksen $|AB| = |BC|$ perusteella saadaan

$$|PB'| = |AB| = |BC| = |B'Q|.$$

Koska $P * B' * Q$ ja $A' * B' * C'$, on ristikulmina $\measuredangle A'B'P \cong \measuredangle C'B'Q$ (Lause 3.4). Lisäksi käänteisen vuorokulmalauseen 5.11 perusteella $\measuredangle A'PB' \cong \measuredangle C'QB'$, sillä $C'sA'$ (koska $B' \in s$) ja $\overleftrightarrow{A'P} = \ell \parallel n = \overleftrightarrow{C'Q}$. Tällöin kolmiot $\triangle A'PB'$ ja $\triangle C'QB'$ toteuttavat (KSK)-säännön oletukset (Lause 3.6), ja siten myös $A'B' \cong C'B'$. Näin ollen

$$\frac{|AB|}{|BC|} = 1 = \frac{|A'B'|}{|B'C'|},$$

kuten haluttiinkin.

(b) Tässä tapauksessa oletetaan, että $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, missä $p, q \in \mathbb{N}$. Todistuksen ideana on jakaa janat AB ja BC yhtä suuriin osiin uusien yhdensuuntaisten suorien avulla, minkä jälkeen tapausta (a) voidaan soveltaa jokaiseen näistä yhtä suurista osista.

Jaetaan siis ensin jana AB pisteiden P_k avulla siten, että saadaan p yhtä suurta osaa. Toisin sanoen, valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{AB}$ pisteet $P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}$ siten, että

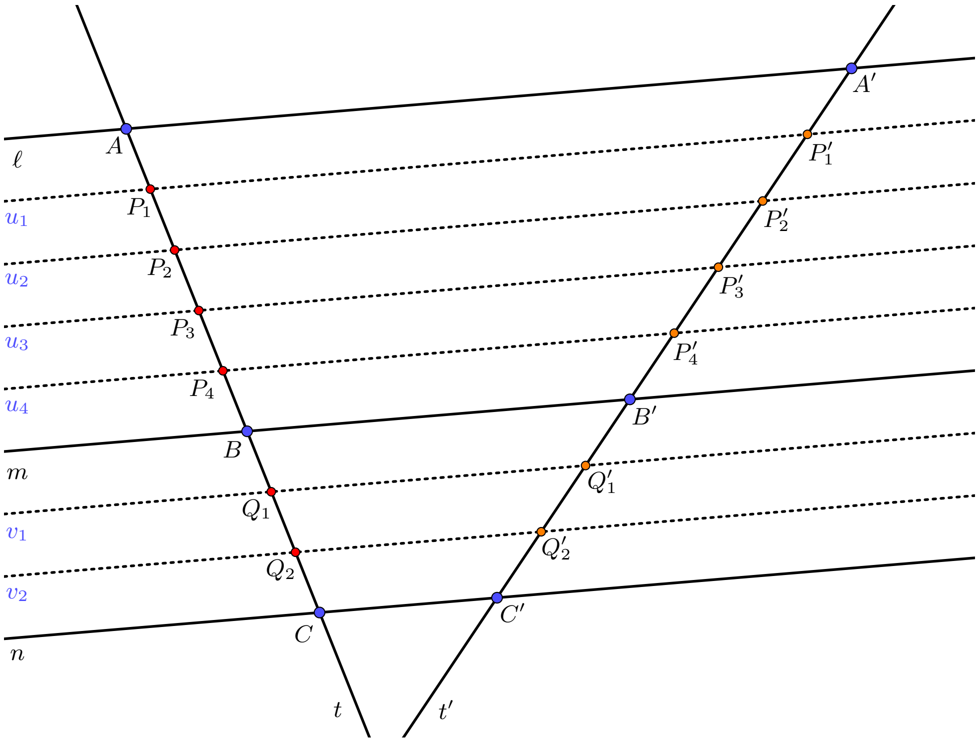
$$|AP_k| = k \cdot \frac{|AB|}{p} \quad \text{kaikille } k = 1, 2, \ldots p-1;$$

tämä onnistuu (JMA)(c) nojalla. Merkitään lisäksi $P_0 = A$ ja $P_p = B$. Tällöin kaikille $k = 1, 2, \ldots p-1$ pätee $A * P_k * P_{k+1}$ (sillä pisteiden P_k valinnan nojalla $|AP_k| < |AP_{k+1}|$; muista Lemma 2.6). Siten (JMA)(b) perusteella

$$|P_kP_{k+1}| = |AP_{k+1}| - |AP_k| = (k+1) \cdot \frac{|AB|}{p} - k \cdot \frac{|AB|}{p} = \frac{|AB|}{p}$$

kaikille $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$, joten pisteet P_k todella jakavat janan AB yhtä pitkiin osiin.

Valitaan nyt kaikille $k = 1, 2, \ldots p-1$ suora u_k siten, että $P_k \in u_k$ ja $u_k \parallel \ell$. Tällöin kaikki suorat u_k ovat yhdensuuntaisia, ja ne myös leikkaavat suoraa t' (Lause 5.10);



Tapaus (b), kun $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{p}{q} = \frac{5}{3}$

olkoot nämä leikkauspisteet $P'_k \in u_k$. Merkitään lisäksi $P'_0 = A'$ ja $P'_p = B'$ sekä $u_0 = \ell$ ja $u_p = m$. Tällöin kaikille $k = 1, 2, \ldots p-1$ pätee $A' * P'_k * P'_{k+1}$ (tämä perustellaan samoin kuin väite $A' * B' * C'$).

Kuten edellä todettiin, on $|P_{k-1}P_k| = \frac{|AB|}{p} = |P_kP_{k+1}|$ kaikille $k = 1, 2, \ldots p-1$. Näin ollen (a)-kohtaa voidaan soveltaa yhdensuuntaisiin suoriin u_{k-1}, u_k ja u_{k+1}, jolloin saadaan

$$1 = \frac{|P_{k-1}P_k|}{|P_kP_{k+1}|} = \frac{|P'_{k-1}P'_k|}{|P'_kP'_{k+1}|} \qquad \text{kaikille } k = 1, 2, \ldots p-1.$$

Siten $|P'_{k-1}P'_k| = |P'_kP'_{k+1}|$ kaikille $k = 1, 2, \ldots p-1$, joten pisteet P'_k jakavat janan $A'B'$ yhtä suuriin osiin, joita on myös p kappaletta. Tällöin tietysti $|P'_{k-1}P'_k| = \frac{|A'B'|}{p}$ kaikille $k = 1, 2, \ldots p$.

Aivan vastaavalla tavalla löydetään janalta BC pisteet Q_j, $j = 1, 2, \ldots q-1$, jotka jakavat janan BC yhtä suuriin osiin, joita on q kappaletta, sekä suorat $v_j \parallel \ell$ siten, että $Q_j \in v_j$ kaikille $j = 1, 2, \ldots q-1$. Suora v_j leikkaa suoraa t' pisteessä Q'_j. Merkitään lisäksi $Q_0 = B$, $Q_q = C$ ja $Q'_0 = B'$, $Q'_q = C'$. Tällöin pätee

$$|Q_{j-1}Q_j| = \frac{|BC|}{q} \qquad \text{ja} \qquad |Q'_{j-1}Q'_j| = \frac{|B'C'|}{q}$$

kaikille $j = 1, 2, \ldots q$; nämä perustellaan kuten vastaavat väitteet pisteille P_k ja P'_k edellä.

Huomaa, että tähän mennessä (b)-kohdan todistuksessa on käsitelty erikseen janoja AB ja $A'B'$ sekä janoja BC ja $B'C'$. Yhteys näiden välille saadaan pisteiden P_{p-1},

B ja Q_1 avulla. Näille pätee $P_{p-1} * B * Q_1$, ja lisäksi

$$\frac{|P_{p-1}B|}{|BQ_1|} = \frac{|AB|/p}{|BC|/q} = \frac{|AB|}{p} \cdot \frac{q}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{q}{p} = 1.$$

Siten tapaus (a) soveltuu suoriin u_{p-1}, m ja v_1, ja siten myös $\frac{|P'_{p-1}B'|}{|B'Q'_1|} = 1$. Näin ollen

$$\frac{|A'B'|}{p} = |P'_{p-1}B'| = |B'Q'_1| = \frac{|B'C'|}{q},$$

mistä seuraa, että

$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{p}{q} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

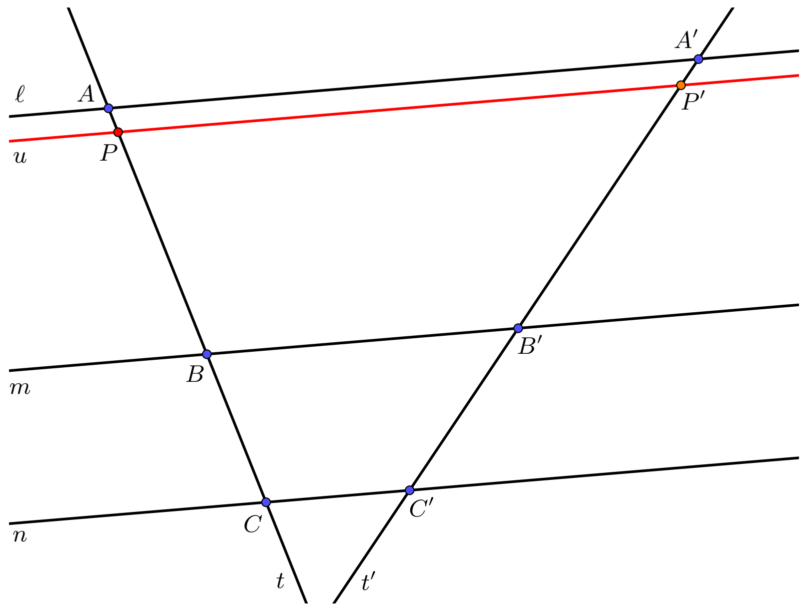
Tämä todistaa väitteen tapauksessa (b).

(c) Viimeisessä tapauksessa on siis $\frac{|AB|}{|BC|} \notin \mathbb{Q}$. Tällöin janoja AB ja BC ei voida jakaa yhtä suuriin osiin siten, että molempien janojen osat olisivat myös keskenään yhtä suuria, kuten tapauksessa (b) (mieti!). Voimme kuitenkin hyödyntää tapausta (b), kun käytetään hyväksi rationaalilukujen tiheyttä reaalilukujen joukossa.

Merkitään

$$x = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \text{ja} \quad x' = \frac{|A'B'|}{|B'C'|},$$

jolloin pitää siis osoittaa, että $x = x'$. Tehdään **antiteesi**, että onkin $x \neq x'$. Tällöin voidaan olettaa, että $x > x'$, sillä tapaus $x < x'$ käsitellään aivan vastaavasti.



Rationaalilukujen tiheyden nojalla on olemassa $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ siten, että $x' < \frac{p}{q} < x$. Valitaan nyt piste $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $|BP| = \frac{p}{q}|BC|$; tässä tarvitaan (JMA)(c)-kohtaa sekä aksioomaa (A6). Tällöin

$$|BP| = \frac{p}{q} \cdot |BC| < x \cdot |BC| = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot |BC| = |AB|,$$

joten $BP < AB$. Siispä täytyy olla $B * P * A$.

Olkoon nyt u suora siten, että $P \in u$ ja $u \parallel \ell$. Tällöin u leikkaa suoran t' pisteessä P', jolle pätee $B' * P' * A'$ (tämä perustellaan jälleen kuten väite $A' * B' * C'$), ja siten $|B'P'| < |A'B'|$. Toisaalta pisteen P valinnan nojalla pätee $\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{p}{q}$. Tällöin (b)-kohta soveltuu näihin pisteisiin, ja siten myös $\frac{|B'P'|}{|B'C'|} = \frac{p}{q}$. Kun edellä saadut tiedot yhdistetään, saadaan

$$x' < \frac{p}{q} = \frac{|B'P'|}{|B'C'|} < \frac{|A'B'|}{|B'C'|} = x',$$

mikä on tietysti ristiriita. Siispä täytyy olla $x = x'$, ja näin ollen tapaus (c) ja siten koko lause on viimein todistettu. □

6.2. **Yhdenmuotoiset kolmiot.** Muista, että yhtenevissä kolmioissa kaikki vastinosat (kulmat ja sivut) ovat yhteneviä. Yhdenmuotoisuudessa vaatimus sivujen yhtenevyydestä korvataan sillä, että kaikkien vastinsivujen pituuksien tulee olla samassa suhteessa toisiinsa. Yhdenmuotoiset kolmiot voivat siis olla eri kokoisia, mutta niiden tulee olla ”saman näköisiä”.

Määritelmä. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat **yhdenmuotoiset**, jos

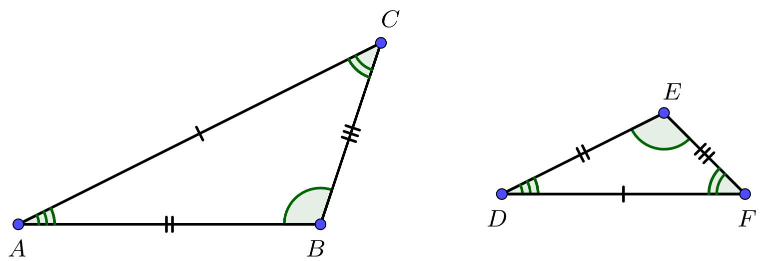
$$\measuredangle A \cong \measuredangle D, \ \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ ja } \measuredangle C \cong \measuredangle F$$

sekä

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Tällöin merkitään $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Toisin sanoen, kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niiden kaikki vastinkulmat ovat yhteneviä ja kaikkien vastinsivujen pituuksien suhde on sama.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Tässä tapauksessa $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{5}{3}$.

Huomautus 6.2. Oletetaan, että kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ on $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle E$. Koska kolmion kulmien astemittojen summa on aina 180 (Lause 5.12), saadaan tällöin (KMA) avulla, että myös $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

Yhdenmuotoisuuden määritelmä yleistyy suoraviivaisesti muillekin monikulmioille: vaaditaan, että *kaikki* vastinkulmat ovat yhteneviä ja että *kaikkien* vastinsivujen pituuksien suhde on sama. Tämän luvun päätuloksina osoitetaan, että itse asiassa **kolmioiden** yhdenmuotoisuuteen riittää, että **toinen** seuraavista ehdoista toteutuu:

(i) kaikki vastinkulmat ovat yhteneviä; Huomautuksen 6.2 nojalla tämä pätee, jos kolmioissa on kaksi yhtenevää vastinkulmaa.

(ii) kaikkien vastinsivujen pituuksien suhde on vakio.

Huomaa, että sama ei päde nelikulmioille (tai muille n-kulmioille, missä $n \geq 4$): esimerkiksi kaikki suorakulmiot eivät ole yhdenmuotoisia, eivätkä myöskään **neljäkkäät**, joissa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Ehdon (i) riittävyys yhtenevyydelle todistetaan seuraavaksi Lauseessa 6.3 ja ehdon (ii) riittävyys Lauseessa 6.6. Kannattaa huomata, että Lauseen 6.3 todistus perustuu täysin yhdensuuntaisprojektiolauseen 6.1 käyttöön.

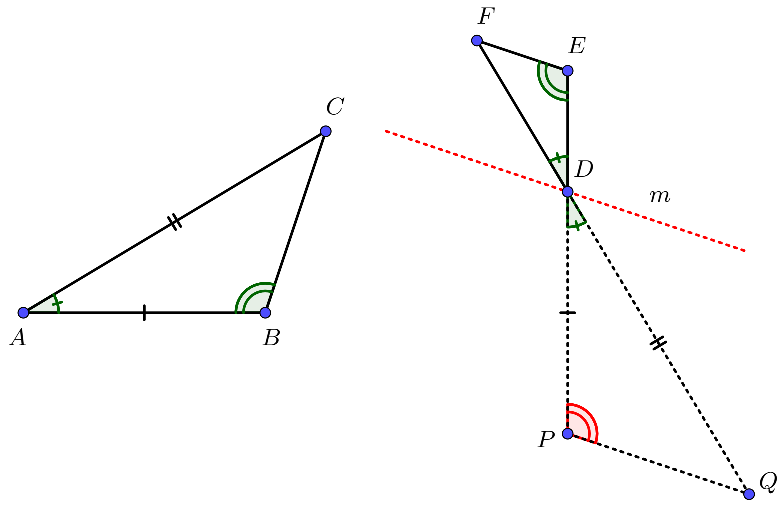
Lause 6.3 ((KK)-yhdenmuotoisuus)**.** *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ ja $\measuredangle B \cong \measuredangle E$. Tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

(*Toisin sanoen, tällöin myös $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ sekä $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$.*)

Todistus. Huomautuksen 6.2 nojalla pätee $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, joten riittää osoittaa, että vastinsivujen pituuksien suhde on sama. Tämä tehdään Lauseen 6.1 avulla.

Valitaan ensin pisteet P ja Q siten, että $P * D * E$ ja $|DP| = |AB|$ sekä $Q * D * F$ ja $|DQ| = |AC|$ (tämä onnistuu aksioomien (A4) ja (A6) nojalla). Tällöin $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$ (oletus) ja $\measuredangle EDF \cong \measuredangle PDQ$ (ristikulmat), joten $\measuredangle PDQ \cong \measuredangle BAC$. Siispä (SKS)-säännön perusteella $\triangle PDQ \cong \triangle BAC$, jolloin myös $\measuredangle DPQ \cong \measuredangle ABC$.

Koska $\measuredangle DPQ = \measuredangle EPQ$ ja oletuksen nojalla $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF = \measuredangle PEF$, on myös $\measuredangle EPQ \cong \measuredangle PEF$. Lisäksi $Q\overleftrightarrow{EP}F$ (sillä $Q * D * F$ ja $D \in \overleftrightarrow{EP}$), joten vuorokulmalause 5.1 soveltuu ja sen perusteella $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.



Olkoon vielä m suora siten, että $D \in m$ ja $m \parallel \overleftrightarrow{EF}$ (Lause 5.2). Nyt voidaan soveltaa Lausetta 6.1 suorille $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$, m, $n = \overleftrightarrow{EF}$, $t = \overleftrightarrow{EP}$ ja $t' = \overleftrightarrow{FQ}$, ja saadaan, että

$$\frac{|PD|}{|DE|} = \frac{|QD|}{|DF|}.$$

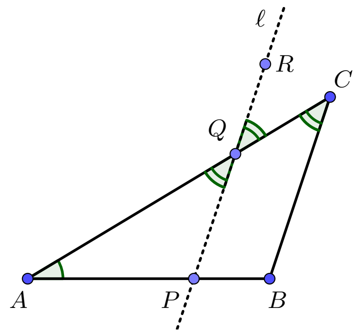
Koska $|PD| = |AB|$ ja $|QD| = |AC|$, on siis myös

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Kun vastaava päättely toistetaan pisteen E suhteen, saadaan että myös $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$, ja väite on todistettu. $\square$

Lauseen 6.6 todistuksessa tarvitaan seuraavaa aputulosta, joka seuraa melko suoraviivaisesti edellisen lauseen (KK)-säännöstä.

Lemma 6.4. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Oletetaan, että $A * P * B$ ja että ℓ on suora siten, että $P \in \ell$ ja $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tällöin suora ℓ leikkaa kolmion sivua AC pisteessä Q ja pätee, että $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.*



Todistus. Koska $A * P * B$ ja $P \in \ell$, niin $A\ell B$, ja koska $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$, niin $BC\ell$. Tällöin $A\ell C$ (Lause 2.5), joten on todella olemassa piste $Q \in \ell$ siten, että $A * Q * C$.

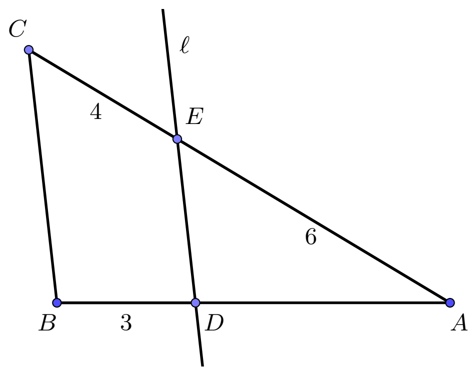
Valitaan piste R siten, että $P * Q * R$. Tällöin tietysti $P\overleftrightarrow{CQ}R$, ja koska $A * P * B$ ja $A \in \overleftrightarrow{CQ}$, niin $BP\overleftrightarrow{CQ}$. Siispä $B\overleftrightarrow{CQ}R$ (Lause 2.5).

Oletuksen mukaan $\overleftrightarrow{RQ} = \ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$, ja koska $B\overleftrightarrow{CQ}R$, on käänteisen vuorokulmalauseen 5.11 nojalla $\measuredangle ACB = \measuredangle QCB \cong \measuredangle CQR$. Toisaalta ristikulmina $\measuredangle CQR \cong \measuredangle AQP$, ja näin ollen $\measuredangle ACB \cong \measuredangle AQP$.

Koska lisäksi $\measuredangle BAC \cong \measuredangle PAQ$ (sama kulma), on kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle APQ$ kaksi yhtenevää vastinkulmaa, ja siten (KK)-lauseen 6.3 perusteella $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, kuten haluttiinkin. $\square$

Otetaan tähän väliin yksi konkreettinen esimerkki yhdenmuotoisuuteen liittyen.

Esimerkki 6.5. Oheisessa kuvassa $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Kuinka pitkä on jana AB?



Ratkaisu: Merkitään $x = |AB|$. Lemman 6.4 perusteella $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, mistä saadaan vastinsivujen suhteiden avulla, että

$$\frac{x}{x-3} = \frac{6+4}{6} \implies 6x = 10x - 30 \implies 4x = 30 \implies x = 7{,}5.$$

Siispä $|AB| = 7{,}5$.

Lause 6.6 ((SSS)-yhdenmuotoisuus)**.** *Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että*

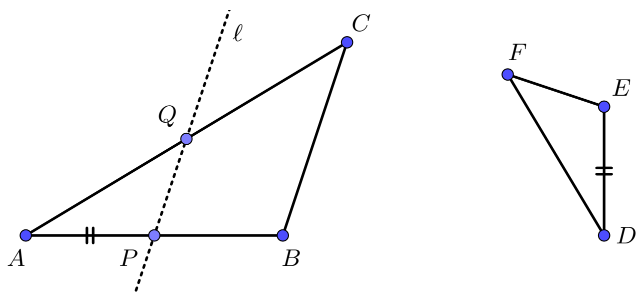
$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

(*Toisin sanoen, tällöin myös $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.*)

Todistus. Merkitään $a = \frac{|AB|}{|DE|}$. Jos $a = 1$, ovat kaikki kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ vastinsivut yhtä pitkiä, jolloin yhtenevyyden (SSS)-säännön (Lause 3.8) nojalla myös kaikki vastinkulmat ovat yhteveviä ja siten kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Voidaan siis olettaa, että $a \neq 1$, jolloin $0 < a < 1$ tai $a > 1$. Todistetaan väite tapauksessa $a > 1$; toinen tapaus käsitellään aivan vastaavasti, kun vaihdetaan $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$.



Koska nyt $\frac{|AB|}{|DE|} = a > 1$, niin $DE < AB$, ja siten löytyy piste P jolle pätee $A * P * B$ ja $AP \cong DE$. Olkoon nyt ℓ suora siten, että $P \in \ell$ ja $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tällöin Lemman 6.4 perusteella $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, missä Q on suoran ℓ ja janan AC leikkauspiste. Yhdenmuotoisuuden perusteella näissä kolmioissa pätee

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|AC|},$$

mistä seuraa esimerkiksi, että $|AQ| = |AC| \cdot \frac{|AP|}{|AB|}$. Toisaalta pisteen P valinnan nojalla $|AP| = |DE|$ ja oletuksen perusteella $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|}$, joten saadaan, että

$$|AQ| = |AC| \cdot \frac{|AP|}{|AB|} = |AC| \cdot \frac{|DE|}{|AB|} = |AC| \cdot \frac{|DF|}{|AC|} = |DF|.$$

Siispä $AQ \cong DF$.

Aivan vastaavasti osoitetaan, että pätee myös $PQ \cong EF$. Tällöin (SSS)-yhtenevyyssäännön nojalla $\triangle APQ \cong \triangle DEF$, ja siten näiden kolmioiden kaikki vastinkulmat ovat yhteneviä. Toisaalta myös $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, jolloin näissäkin kolmioissa kaikki vastinkulmat ovat yhteneviä, ja nämä tiedot yhdistämällä saadaan, että todella $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

Muotoillaan vielä (SKS)-säännön vastine yhdenmuotoisuudelle: tämän mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niissä on yhdet yhtenevät kulmat ja lisäksi näiden kulmien viereisten sivujen pituuksien suhde on sama.

Lause 6.7 ((SKS)-yhdenmuotoisuus)**.** *Olkoot* $\triangle ABC$ *ja* $\triangle DEF$ *kolmioita siten, että*

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

ja lisäksi $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$*. Tällöin* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*.*

Todistus. Harjoitustehtävä; tässä voi esimerkiksi yrittää samankaltaista strategiaa, kuin Lauseen 6.6 todistuksessa. □

Huomautus 6.8. Huomautuksessa 3.11 pohdittiin yhtenevyyssääntöjen (SKK), (SSK) sekä (KKK) mahdollisuutta. Ensimmäinen näistä toimiikin (harjoitustehtävä, joko kulmasummalauseen tai ulkokulmaepäyhtälön avulla). Sen sijaan (SSK)-tilanne ei takaa kolmioiden yhtenevyyttä. Tämän voi todeta helposti esimerkiksi jakamalla tasakylkisen kolmion kannan kahteen erisuureen osaan, jolloin muodostuu kaksi kolmiota, joissa pätee (SSK)-tilanne, mutta kolmiot eivät kuitenkaan ole yhteneviä.

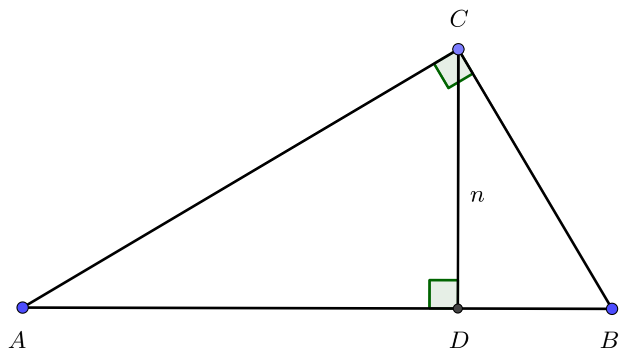
Euklidisessa geometriassa (KKK)-sääntö yksinkertaistuu kulmasummalauseen takia (KK)-säännöksi. Tämä tilanne ei tietenkään takaa yhtenevyyttä, mutta Lauseen 6.3 perusteella kolmiot ovat tällöin yhdenmuotoiset. Ehkä vähän yllättävää on kuitenkin se, että **hyperbolisessa geometriassa** (jossa siis oletetaan, että (PA) ei ole voimassa) voidaan todistaa myös (KKK)-yhtenevyyssääntö! Tämä tarkoittaa erityisesti sitä, että hyperbolisessa geometriassa ei ole muita yhdenmuotoisia kolmioita kuin yhtenevät kolmiot, joissa siis vastinsivujen pituuksien suhde on 1. (Näiden asioiden tarkempi perustelu menee luonnollisesti ohi tämän kurssin sisällön, mutta ei ole kuitenkaan kovin hankalaa, kun käytössä on hieman hyperbolisen geometrian perusteita. Näihin tutustutaan tarkemmin kurssilla *Geometria*.)

Sana **trigonometria** voidaan suomentaa **kolmioiden mittaamiseksi**. Yleisesti ottaen trigonometriassa on tarkoitus löytää yleisiä sääntöjä kolmioiden sivujen pituuksien ja kulmien suuruuksien välille. Näiden sääntöjen avulla on sitten mahdollista ratkaista kolmioista tuntemattomia osia, kunhan riittävän monta osaa tunnetaan.

Ensimmäinen trigonometrinen lauseemme on tuttu Pythagoraan lause. Tämän avulla **suorakulmaisesta kolmiosta** pystytään ratkaisemaan tuntematon sivun pituus, kunhan kaksi muuta sivun pituutta tunnetaan.

Lause 7.1 (Pythagoras)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa kulma $\measuredangle C = \measuredangle ACB$ on suora kulma. Tällöin*

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2.$$



Pythagoraan lauseelle esitettiin todistus jo kurssin alussa, mutta tässä vaiheessa kannattaa käydä todistus uudelleen läpi ja tarkastaa, että kaikki todistuksessa tarvitut tiedot on nyt mahdollista perustella huolellisesti (harjoitustehtävä).

Pythagoraan lauseelle pätee myös käänteinen puoli, joten voidaan todeta, että kolmiossa $\triangle ABC$ pätee $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ jos ja vain jos kulma $\measuredangle C = \measuredangle ACB$ on suora kulma.

Lause 7.2 (Käänteinen Pythagoraan lause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa pätee $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$. Tällöin kulma $\measuredangle C = \measuredangle ACB$ on suora kulma.*

Todistus. Tähän on useampiakin tapoja (harjoitustehtävä), mutta seuraava (SSS)-sääntöön perustuva päättely on melko suoraviivainen:

Olkoon $\overrightarrow{FE}$ puolisuora siten, että $|EF| = |BC|$ (A6). Valitaan sitten (A7) ja (A6) avulla puolisuora $\overrightarrow{FD}$ siten, että $\measuredangle DFE$ on suora kulma ja $|DF| = |AC|$. Tällöin kolmio $\triangle DEF$ on suorakulmainen, joten Pythagoraan lauseen nojalla pätee $|DE|^2 = |DF|^2 + |EF|^2$. Mutta tällöinhän oletuksen ja pisteiden E ja F valintojen perusteella saadaan, että

$$|DE|^2 = |DF|^2 + |EF|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

Koska $|DE| > 0$ ja $|AB| > 0$, täytyy siis olla $|DE| = |AB|$. Tällöin kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat kaikki vastinsivut yhteneviä, joten (SSS)-säännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Erityisesti $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$, jolloin myös $\measuredangle ACB$ on suora kulma (molempien kulmien astemitta on 90; muista Lause 3.1). Siispä väite on todistettu. $\square$

Trigonometristen suhteiden (sini ja kosini) määritelmät perustuvat siihen, että (KK)-säännön nojalla kaikki suorakulmaiset kolmiot, joissa on suorien kulmien lisäksi toisetkin yhtenevät kulmat, ovat yhdenmuotoisia. Koska suorakulmaisten kolmioiden muut kulmat ovat aina suoraa kulmaa pienempiä, annetaan sinin ja kosinin määritelmät erikseen teräville ja tylpille kulmille. Muista, että kulma $\measuredangle ABC$ on **terävä**, jos $(\measuredangle ABC)^\circ < 90$, ja **tylppä**, jos $(\measuredangle ABC)^\circ > 90$.

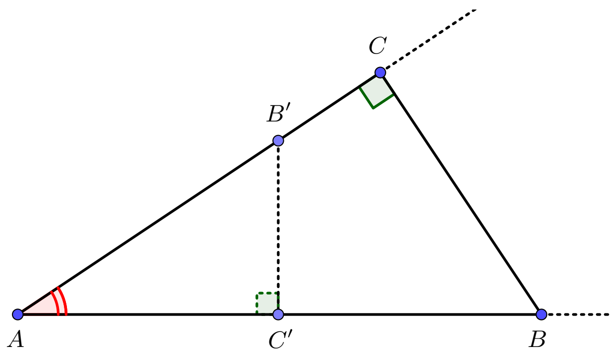
Määritelmä. (a) Olkoon $\measuredangle A$ terävä kulma. Tällöin voidaan muodostaa kolmio $\triangle ABC$ siten, että $\measuredangle BAC = \measuredangle A$ ja $\measuredangle ACB$ on suora kulma (mieti!). Kulman $\measuredangle A$ **sini** ja **kosini** määritellään asettamalla

$$\sin(\measuredangle A) = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad \cos(\measuredangle A) = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

(b) Jos $\measuredangle A = \measuredangle BAC$ on tylppä kulma, on sen vieruskulma $\measuredangle DAB$ terävä. Tällöin asetetaan

$$\sin(\measuredangle A) = \sin(\measuredangle DAB) \quad \text{ja} \quad \cos(\measuredangle A) = -\cos(\measuredangle DAB).$$

(c) Jos $\measuredangle A$ on suora kulma, määritellään $\sin(\measuredangle A) = 1$ ja $\cos(\measuredangle A) = 0$.



$$\sin(\measuredangle A) = \tfrac{|BC|}{|AB|} \quad \left(= \tfrac{|B'C'|}{|AB'|} \right)$$

Huomautus 7.3. Kulman sini ja kosini ovat **hyvin määriteltyjä**. Toisin sanoen, arvot $\sin(\measuredangle A)$ ja $\cos(\measuredangle A)$ eivät riipu siitä, miten määritelmän suorakulmainen kolmio $\triangle ABC$ valitaan.

Itse asiassa aivan samalla tavalla voidaan perustella myös vähän vahvempi tulos: jos $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ ja lisäksi kulmat $\measuredangle ACB$ ja $\measuredangle DFE$ ovat suoria kulmia, niin

$$\sin(\measuredangle A) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|DE|} = \sin(\measuredangle D),$$

ja vastaavasti myös $\cos(\measuredangle A) = \cos(\measuredangle D)$; yksityiskohdat ovat helppo harjoitustehtävä.

Siniä ja kosinia käyttäen saadaan aikaan lauseita, joiden avulla voidaan ratkaista kolmioiden tuntemattomia osia (sivuja ja/tai kulmia), kun kolmiosta tunnetaan kolme osaa, joista ainakin yksi on sivu.

Lause 7.4 (Sinilause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

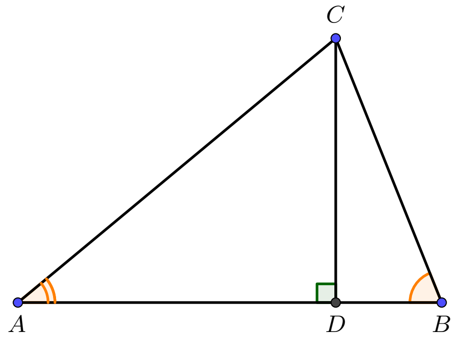
$$\frac{\sin(\measuredangle A)}{|BC|} = \frac{\sin(\measuredangle B)}{|AC|} = \frac{\sin(\measuredangle C)}{|AB|}.$$

Todistus. Todistetaan, että $\frac{\sin(\measuredangle A)}{|BC|} = \frac{\sin(\measuredangle B)}{|AC|}$; väite $\frac{\sin(\measuredangle B)}{|AC|} = \frac{\sin(\measuredangle C)}{|AB|}$ perustellaan tietysti aivan vastaavasti.

(1) Jos $\measuredangle A$ on suora kulma, on $\sin(\measuredangle A) = 1$, ja väite seuraa suoraan kulman $\measuredangle B$ sinin määritelmästä: $\sin(\measuredangle B) = \frac{|AC|}{|BC|}$.

(2) Oletetaan sitten, että kulma $\measuredangle A$ on terävä. Lauseen 3.5 nojalla löydetään piste $D \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Koska $\measuredangle A$ on terävä, täytyy itse asiassa olla $D \in \overrightarrow{AB}$; muutoin olisi $D * A * B$, ja tällöin kulma $\measuredangle A = \measuredangle BAC$ olisi suorakulmaisen kolmion $\triangle ADC$ ulkokulma, mikä on ulkokulmaepäyhtälön 5.4 nojalla mahdotonta koska $(\measuredangle BAC)^\circ < 90 = (\measuredangle C)^\circ$. Lisäksi $D \neq A$, koska kulma $\measuredangle A$ ei ole suora kulma. Näin ollen $\measuredangle A = \measuredangle BAC = \measuredangle DAC$, jolloin sinin määritelmän mukaan $\sin(\measuredangle A) = \frac{|CD|}{|AC|}$.

Koska $D \in \overrightarrow{AB}$ ja $D \neq A$, on pisteen D sijainnille jäljellä kolme vaihtoehtoa: (i) $A * D * B$, (ii) $D = B$ tai (iii) $A * B * D$.



Tapaus (i): $A * D * B$

(i) Jos $A * D * B$, on $\measuredangle B = \measuredangle ABC = \measuredangle DBC$ myös terävä kulma, ja siten sinin määritelmän mukaan $\sin(\measuredangle B) = \frac{|CD|}{|BC|}$. Näin ollen

$$\frac{\sin(\measuredangle A)}{|BC|} = \frac{|CD|}{|AC|} \cdot \frac{1}{|BC|} = \frac{|CD|}{|BC|} \cdot \frac{1}{|AC|} = \frac{\sin(\measuredangle B)}{|AC|},$$

kuten haluttiinkin.

(ii) Jos $D = B$, on kulma $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ suora kulma. Tällöin $\sin(\measuredangle B) = 1$ ja väite seuraa siitä, että $\sin(\measuredangle A) = \frac{|BC|}{|AC|}$.

(iii) Jos taas $A*B*D$, on $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ suorakulmaisen kolmion $\triangle BDC$ ulkokulma, ja siten kulman $\measuredangle B$ täytyy olla tylppä ulkokulmaepäyhtälön 5.4 nojalla. Tällöin sinin määritelmän mukaan $\sin(\measuredangle B) = \sin(\measuredangle CBD) = \frac{|CD|}{|BC|}$, ja väite seuraa aivan kuten tapauksessa $A * D * B$.

(3) Jäljellä on vielä tapaus, jossa kulma $\measuredangle A$ on tylppä. Mutta tällöin kulman $\measuredangle B$ täytyy olla terävä; muuten $(\measuredangle A)^\circ + (\measuredangle B)^\circ > 180$, mikä on ristiriita Lauseen 5.7 (tai kulmasummalauseen) kanssa. Tällöin tapausta (2)(iii) voidaan soveltaa kulman $\measuredangle B$ suhteen, ja väite saadaan aivan kuten edellä. □

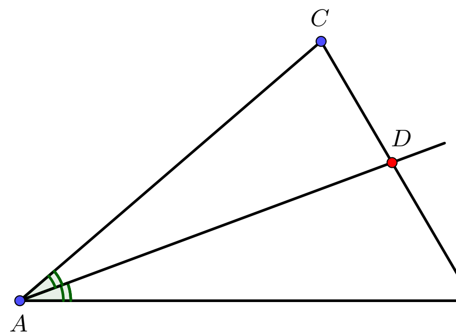
Sinilauseesta saadaan seurauksena

Lause 7.5 (Kulmanpuolittajalause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon $B * D * C$ siten, että $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle BAC$ puolittaja. Tällöin*

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Toisin sanoen, kolmion kulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

Todistus. Harjoitustehtävä. □



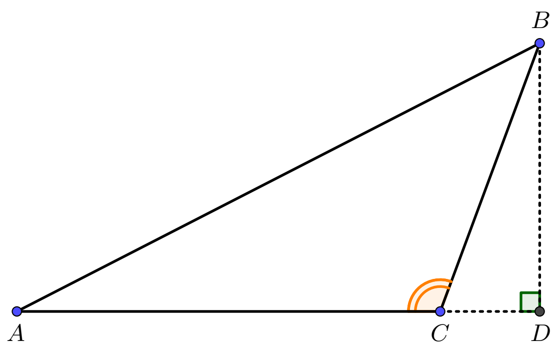
Seuraava kosinilause on erityisen hyödyllinen, koska sen avulla voidaan ratkaista kolmion tuntematon sivu, kun kaksi muuta sivua ja yksi kulma tunnetaan. Huomaa, että Pythagoraan lause sisältyy kosinilauseeseen erikoistapauksena, kun $\measuredangle C$ on suora kulma. Näin ollen kosinilausetta voidaan pitää Pythagoraan lauseen yleistyksenä kaikille kolmioille.

Lause 7.6 (Kosinilause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC|\cos(\measuredangle C).$$

Todistus. Olkoon n pisteen B kautta kulkeva suoran $\overleftrightarrow{AC}$ normaali (Lause 3.5) ja olkoon D suorien n ja $\overleftrightarrow{AC}$ leikkauspiste. Tällöin pisteen D sijainnille suoralla $\overleftrightarrow{AC}$ on viisi vaihtoehtoa:

$$\text{(i) } A * C * D, \quad \text{(ii) } C = D, \quad \text{(iii) } A * D * C, \quad \text{(iv) } A = D \quad \text{tai} \quad \text{(v) } D * A * C.$$



Tapaus (i): $A * C * D$

(i) Koska kolmiossa $\triangle BCD$ on $(\measuredangle BDC)^\circ = 90$ ja $\measuredangle BCA$ on tämän kolmion ulkokulma, on ulkokulmaepäyhtälön (Lause 5.4) perusteella $(\measuredangle BCA)^\circ > 90$, joten kulma $\measuredangle BCA$ on tylppä. Niinpä kosinin määritelmän mukaan

$$\cos(\measuredangle BCA) = -\cos(\measuredangle BCD) = -\tfrac{|CD|}{|BC|}.$$

Toisaalta suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle BCD$ pätee Pythagoraan lauseen 7.1 perusteella $|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}|BC|^2+&|AC|^2 - 2|BC||AC|\cos(\measuredangle BCA)\\ &= |BD|^2 + |CD|^2 + |AC|^2 - 2|BC||AC| \cdot \left(-\tfrac{|CD|}{|BC|}\right)\\ &= |BD|^2 + \underbrace{|CD|^2 + |AC|^2 + 2|AC||CD|}_{=(|CD|+|AC|)^2=|AD|^2}\\ &= |BD|^2 + |AD|^2 = |AB|^2,\end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Pythagoraan lauseesta suorakulmaiselle kolmiolle $\triangle ADC$ ja $|CD| + |AC| = |AD|$ koska $A * C * D$ (JMA)(b). Tämä todistaa väitteen tapauksessa (i).

(ii) Tässä tapauksessa $\measuredangle ACB$ on siis suora kulma, joten $\cos(\measuredangle ACB) = 0$. Siten väite seuraa suoraan Pythagoraan lauseesta kolmiolle $\measuredangle ACB$.

Tapaukset (iii)-(v) jätetään harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 7.7. Oletetaan, että kolmiossa $\triangle ABC$ on $|AB| = 5$, $|BC| = 7$ ja $(\measuredangle CAB)^\circ = 40$. Määritä sivun AC pituus sini- ja kosinilauseiden avulla.

Ratkaisu: Merkitään $|AC| = x$. Taulukoista tai laskimesta nähdään, että

$$\cos(\measuredangle CAB) \approx 0{,}766 \quad \text{ja} \quad \sin(\measuredangle CAB) \approx 0{,}643.$$

(1) Kosinilauseen mukaan

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos(\measuredangle A),$$

joten sijoittamalla tunnetut arvot saadaan

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5x\cos(\measuredangle A) \iff x^2 - 10\cos(\measuredangle A)x - 24 = 0.$$

Tämä on toisen asteen yhtälö muuttujan x suhteen, ja tutun ratkaisukaavan avulla saadaan tälle ratkaisu $x \approx 10{,}05$ (yhtälön toinen ratkaisu on negatiivinen, joten se ei sovi janan pituudeksi).

(2) Jotta $x = |AC|$ saataisiin sinilauseen avulla, täytyy ensin selvittää vastaisen kulman $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ suuruus. Sinilauseen mukaan

$$\frac{\sin(\measuredangle A)}{|BC|} = \frac{\sin(\measuredangle C)}{|AB|} \iff \sin(\measuredangle C) = \frac{|AB|\sin(\measuredangle A)}{|BC|} \approx \frac{5 \cdot 0{,}643}{7} \approx 0{,}459,$$

jolloin $(\measuredangle C)^\circ \approx 27{,}33$ (kulman suuruus saadaan taulukoista tai laskimesta; huomaa että kulman $\measuredangle C$ täytyy tässä olla terävä). Kolmion kulmasummalauseen nojalla tällöin

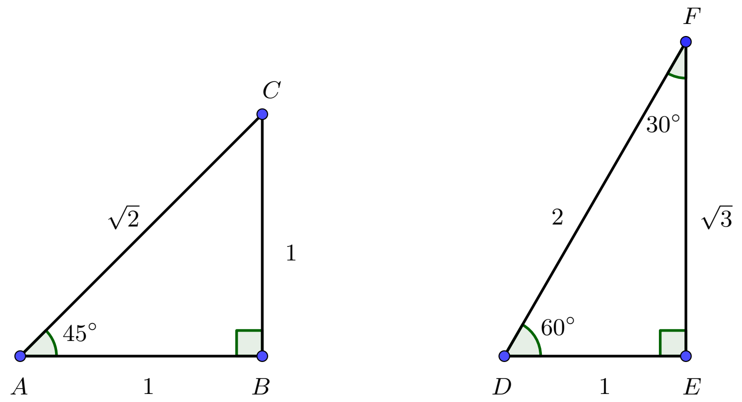
$$(\measuredangle B)^\circ = 180 - (\measuredangle A)^\circ - (\measuredangle C)^\circ \approx 180 - 40 - 27{,}33 = 112{,}67,$$

jolloin $\sin(\measuredangle B) \approx 0{,}923$. Nyt voidaan käyttää uudelleen sinilausetta, ja saadaan, että

$$\frac{\sin(\measuredangle A)}{|BC|} = \frac{\sin(\measuredangle B)}{|AC|} \iff x = |AC| = \frac{|BC|\sin(\measuredangle B)}{\sin(\measuredangle A)} \approx \frac{7 \cdot 0{,}923}{0{,}643} \approx 10{,}05,$$

kuten edelläkin.

Huomautus 7.8. Tietyn suuruisten kulmien sineille ja kosineille voidaan helposti määrittää tarkat arvot niin sanottujen **muistikolmioden** avulla. Nämä ovat neliön puolikas, jossa terävän kulman suuruus on 45 astetta sekä tasasivuisen kolmion puolikas, jossa terävät kulmat ovat 30 ja 60 astetta.



Näistä kolmioista nähdään, että

$$\sin(\measuredangle A) = \cos(\measuredangle A) = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(\measuredangle D) = \cos(\measuredangle F) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ ja }\ \cos(\measuredangle D) = \sin(\measuredangle F) = \tfrac{1}{2},$$

kun $(\measuredangle A)^\circ = 45$, $(\measuredangle D)^\circ = 60$ ja $(\measuredangle F)^\circ = 30$.

Muiden kulmien sinejä ja kosineja (tai näiden likiarvoja) voidaan määrittää erilaisia trigonometrisia kaavoja käyttäen; näiden avulla on alun perin laadittu kaikki trigonometriset taulukotkin. Jos esimerkiksi $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ ovat kulmia siten, että $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ$, pätee yhteenlaskukaava

$$\cos(\measuredangle A) = \cos(\measuredangle B)\cos(\measuredangle C) - \sin(\measuredangle B)\sin(\measuredangle C).$$

Tämän todistus perustuu kosinilauseeseen ja on hyvä harjoitustehtävä.

8. Ympyrät

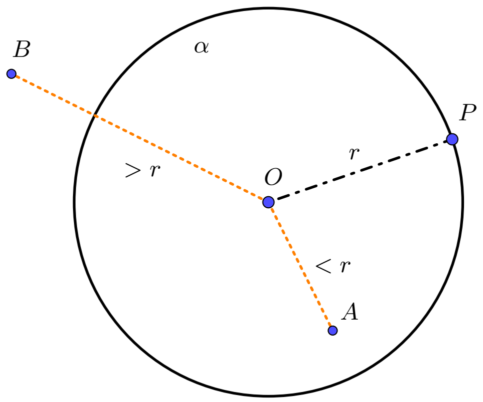
8.1. **Ympyröitä ja tangentteja.** Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin ympyröihin, jotka ovat suorien ja kolmioiden jälkeen tärkeimpiä geometrisia kuvioita. Ympyröitä käsiteltiin jo hieman harppi–viivain -konstruktioiden yhteydessä, mutta aloitetaan tämä luku ympyrän täsmällisellä määritelmällä.

Määritelmä. (a) Olkoon O piste ja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Tällöin joukko

$$\alpha = \{P \text{ on piste} : |OP| = r\}$$

on **O-keskipisteinen r-säteinen ympyrä**. Jos $P \in \alpha$, sanotaan, että P on ympyrän α kehällä.

(b) Olkoon A piste, joka ei ole ympyrällä α. Jos $|OA| < r$ (tai $A = O$), on piste A ympyrän α **sisäpuolella**, ja jos $|OA| > r$, on piste A ympyrän α **ulkopuolella**.



$P \in \alpha$, A ympyrän α sisäpuolella ja B ympyrän α ulkopuolella

Ympyrällä ja suoralla voi olla nolla, yksi tai kaksi leikkauspistettä, kuten seuraavassa lauseessa osoitetaan.

Lause 8.1. *Olkoon α ympyrä ja olkoon ℓ suora. Tällöin ℓ ja α leikkaavat korkeintaan kahdessa eri pisteessä, toisin sanoen joukossa $\ell \cap \alpha$ on korkeintaan kaksi alkiota.*

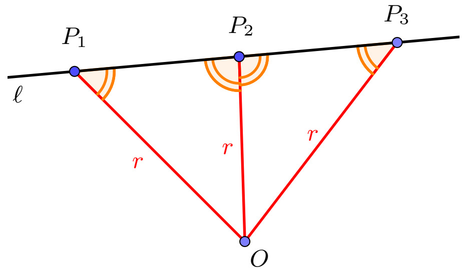
Todistus. Olkoon ympyrän α keskipiste O ja säde $r > 0$. Tehdään **antiteesi**, että ympyrällä α ja suoralla ℓ olisikin ainakin kolme leikkauspistettä, olkoot ne P_1, P_2 ja P_3. Tutkitaan erikseen tapaukset (i) $O \in \ell$ ja (ii) $O \notin \ell$.

(i) Olkoon $m \neq \ell$ suora siten, että $O \in m$. Tällöin ainakin kaksi pisteistä P_1, P_2 ja P_3 on samalla puolella suoraa m (koska m jakaa tason tasan kahteen puolitasoon), voidaan olettaa, että ne ovat P_1 ja P_2. Tällöin aksiooman (A4) nojalla joko $O * P_1 * P_2$ tai $O * P_2 * P_1$ (koska ei voi olla $P_1 * O * P_2$). Jos $O * P_2 * P_1$, niin oletuksen $P_1, P_2 \in \alpha$ ja (JMA)(b) avulla saadaan

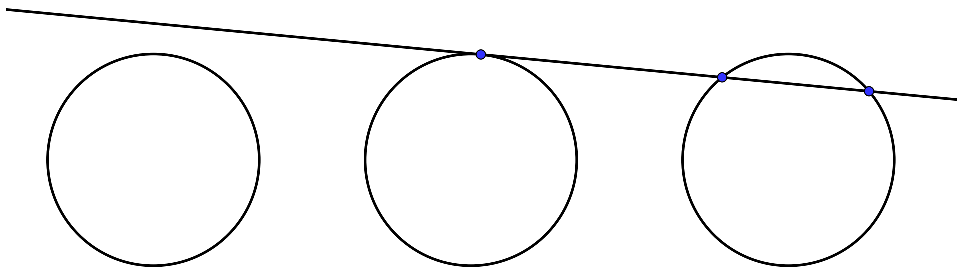
$$r = |OP_1| = |OP_2| + |P_2P_1| > |OP_2| = r,$$

mikä on tietysti ristiriita. Vastaava ristiriita saadaan myös tapauksessa $O * P_1 * P_2$, ja siten leikkauspisteitä voi olla korkeintaan kaksi, kun $O \in \ell$.

(ii) Nyt voidaan olettaa, että $P_1 * P_2 * P_3$, jolloin $\measuredangle OP_2P_1$ ja $\measuredangle OP_2P_3$ ovat vieruskulmat. Tällöin $(\measuredangle OP_2P_1)^\circ + (\measuredangle OP_2P_3)^\circ = 180$, joten ainakin toinen näistä kulmamitoista on vähintään 90; voidaan olettaa, että $(\measuredangle OP_2P_3)^\circ \geq 90$.



Toisaalta kolmiossa $\triangle OP_2P_3$ on $|OP_2| = r = |OP_3|$, joten tämä kolmio on tasakylkinen. Siten Lauseen 3.7 perusteella $\measuredangle OP_3P_2 \cong \measuredangle OP_2P_3$, jolloin myös $(\measuredangle OP_3P_2)^\circ \geq 90$. Mutta tällöin kolmiossa $\triangle OP_2P_3$ pätee $(\measuredangle OP_2P_3)^\circ + (\measuredangle OP_3P_2)^\circ \geq 180$, mikä on ristiriidassa Lauseen 5.7 kanssa. Näin ollen tässäkin tapauksessa suoralla ℓ ja ympyrällä α voi olla korkeintaan kaksi leikkauspistettä. $\square$



Suoralla ja ympyrällä nolla, yksi tai kaksi leikkauspistettä.

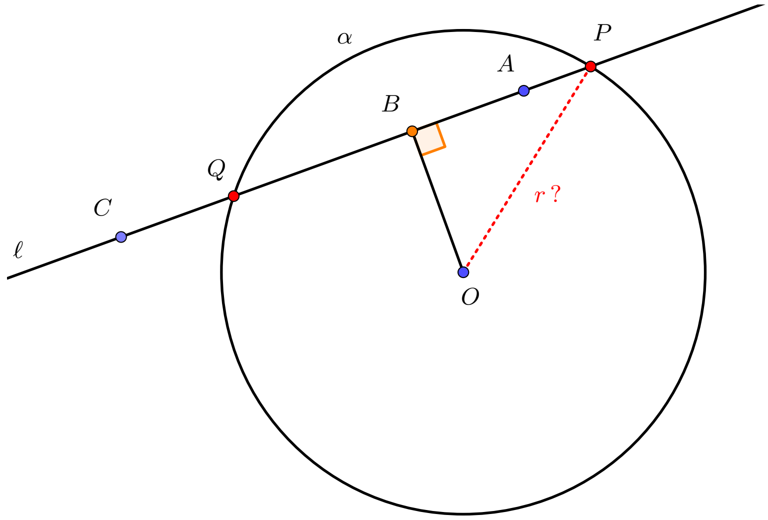
Tyypillisissä tilanteissa suoralla ℓ ja ympyrällä α on joko 0 tai 2 leikkauspistettä. Jos kaikki suoran ℓ pisteet ovat ympyrän α ulkopuolella, on leikkauspisteitä tietysti 0 (koska kaikille suoran ℓ pisteille A pätee, että $|OA| > r$). Toisaalta jos suoralla ℓ on edes yksi piste, joka on ympyrän α sisäpuolella, on leikkauspisteitä tällöin tasan kaksi:

Lause 8.2. *Olkoon α ympyrä ja olkoon ℓ suora. Jos on olemassa piste $A \in \ell$, joka on ympyrän α sisäpuolella, leikkaavat ℓ ja α täsmälleen kahdessa eri pisteessä, toisin sanoen joukossa $\ell \cap \alpha$ on tasan kaksi alkiota.*

Todistus. Olkoon ympyrän α keskipiste O ja säde $r > 0$. Oletetaan ensin, että $O \notin \ell$. Lauseen 3.5 perusteella on olemassa suora n siten, että $O \in n$ ja $n \perp \ell$. Olkoon B suorien n ja ℓ leikkauspiste. Jos $A \neq B$, on tällöin $\measuredangle OBA$ suora kulma; jos $A = B$, valitaan vielä piste $A' \neq A$ siten, että $A' \in \ell$, ja käytetään jatkossa tätä pistettä A' pisteen A sijasta.

Koska $\measuredangle OBA$ on suora kulma, on välttämättä $\measuredangle OAB < \measuredangle OBA$, jolloin Lauseen 5.5 nojalla $|OB| < |OA|$. Oletuksen mukaan A on ympyrän α sisäpuolella, joten $|OA| < r$, ja siten myös $|OB| < r$. Tällöin voidaan valita positiivinen reaaliluku $x =$

$\sqrt{r^2 - |OB|^2}$, jolloin aksioomien (JMA)(c) ja (A6) perusteella on olemassa piste $P \in \overrightarrow{BA}$ siten, että $|BP| = x$. Tällöin tietysti myös $P \in \ell = \overleftrightarrow{AB}$.



Nyt kolmio $\triangle OBP$ on suorakulmainen, joten Pythagoraan lause soveltuu, ja saadaan, että

$$|OP|^2 = |OB|^2 + |BP|^2 = |OB|^2 + r^2 - |OB|^2 = r^2.$$

Koska $|OP| > 0$ ja $r > 0$, täytyy tällöin olla $|OP| = r$, joten $P \in \alpha$. On siis löydetty ainakin yksi leikkauspiste ympyrälle α ja suoralle ℓ.

Valitaan sitten piste $C \in \ell$ siten, että $A * B * C$, jolloin AnC. Aksiooman (A6) nojalla voidaan valita piste $Q \in \overrightarrow{BC}$ siten, että $|BQ| = |BP| = x$. Aivan kuten edellä, saadaan nyt suorakulmaisesta kolmiosta $\triangle OBQ$, että $|OQ| = r$, joten myös $Q \in \alpha \cap \ell$. Lisäksi QCn (sillä $Q \in \overrightarrow{BC}$), jolloin AnQ (Lause 2.5), ja koska toisaalta pätee APn (sillä $P \in \overrightarrow{BA}$), on PnQ. Erityisesti tällöin $P \neq Q$, joten suoralle ℓ ja ympyrälle α on löydetty kaksi eri leikkauspistettä. Enempää ei Lauseen 8.1 mukaan voi ollakaan, ja siten väite on todistettu tapauksessa $O \notin \ell$.

Jos taas $O \in \ell$, on suoraviivaista valita pisteet $P, Q \in \ell$ siten, että $P * O * Q$ ja $|OP| = |OQ| = r$. Tällöin P ja Q ovat halutut leikkauspisteet, joten väite pätee tässäkin tapauksessa. $\square$

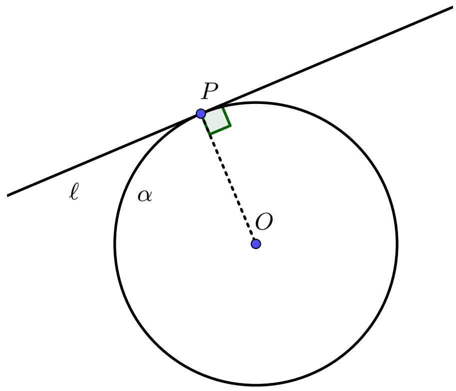
Tapaus, jossa suora ja ympyrä leikkaavat vain yhdessä pisteessä, on jossakin mielessä ”poikkeuksellinen” ja ansaitsee siten oman määritelmän.

Määritelmä. Suora ℓ on ympyrän α **tangentti**, jos ℓ ja α leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä, toisin sanoen joukossa $\ell \cap \alpha$ on tasan yksi alkio.

Huomaa, että jos ℓ on ympyrän α tangentti, ovat kaikki suoran ℓ pisteet leikkauspistettä lukuunottamatta ympyrän α ulkopuolella (muuten saadaan ristiriita Lauseen 8.2 kanssa).

Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä ympyrän sädettä vastaan ja tämä ominaisuus pätee ainoastaan tangenteille:

Lause 8.3. *Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O, ja olkoon ℓ suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Tällöin suora ℓ on ympyrän α tangentti jos ja vain jos $\ell \perp \overleftrightarrow{OP}$.*



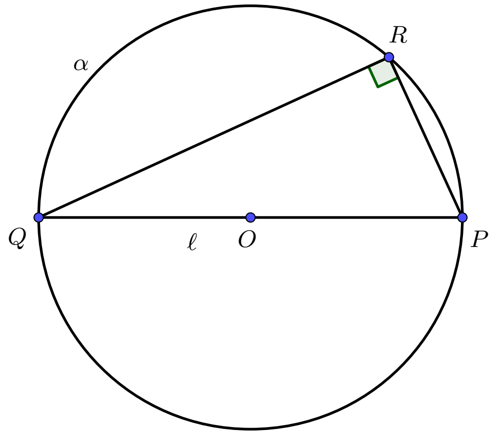
Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan siis, että piste P on suoran ℓ ja ympyrän α ainoa leikkauspiste. Tehdään **antiteesi**, että ℓ ja $\overleftrightarrow{OP}$ eivät olisikaan toistensa normaaleja. Koska pisteen O kautta kuitenkin kulkee normaali suoralle ℓ (Lause 3.5), on siis olemassa $Q \in \ell$ siten, että $\measuredangle OQP$ on suora kulma (ja $Q \neq P$).

Tällöin kolmiossa $\triangle OQP$ täytyy olla $(\measuredangle OPQ)^\circ < 90 = (\measuredangle OQP)^\circ$ (muuten tulee ristiriita Lauseen 5.7 kanssa). Lauseen 5.5 nojalla tästä seuraa $|OQ| < |OP| = r$, joten piste Q on ympyrän α sisäpuolella. Mutta Lauseen 8.2 perusteella suoralla ℓ ja ympyrällä α olisikin tällöin tasan kaksi leikkauspistettä, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen täytyy olla $\ell \perp \overleftrightarrow{OP}$.

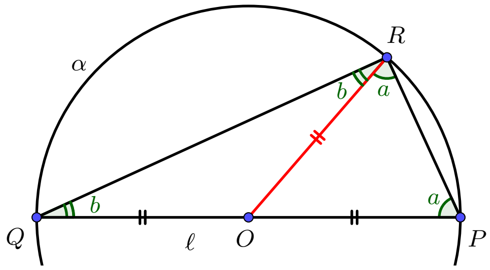
Suunta "$\Leftarrow$" jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

8.2. **Kehäkulmalauseet.** Kehäkulmalauseet liittyvät tilanteisiin, joissa sekä kulman $\measuredangle PRQ$ kärki R että kylkien pisteet P ja Q ovat ympyrän kehällä. Aloitetaan erikoistapauksella, jossa PQ on ympyrän **lävistäjä** (eli jana PQ kulkee ympyrän keskipisteen kautta). Tämä Thaleen lause on eräs tasogeometrian klassisimpia tuloksia, kuten johdannossakin jo mainittiin.

Lause 8.4 (Thaleen lause)**.** *Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O, ja olkoon ℓ suora, joka kulkee pisteen O kautta; tällöin ℓ ja α leikkaavat tasan kahdessa pisteessä $P \neq Q$. Olkoon lisäksi $R \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin kulma $\measuredangle PRQ$ on suora kulma.*



Todistus. Koska $O \in \ell$ ja O on tietysti ympyrän α sisällä, leikkaavat ℓ ja α Lauseen 8.2 nojalla todella kahdessa eri pisteessä P ja Q. Tällöin $|OP| = |OQ| = |OR| = r$, joten kolmiot $\triangle OPR$ ja $\triangle OQR$ ovat tasakylkisiä, ja siten $(\triangle OPR)^\circ = (\triangle ORP)^\circ = a$ ja $(\triangle OQR)^\circ = (\triangle ORQ)^\circ = b$ (Lause 3.7).



Toisaalta täytyy olla $P*O*Q$, sillä nämä ovat suoran ℓ eri pisteitä ja $|OP| = |OQ|$, joten piste O on kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä. Niinpä (KMA)(b) perusteella

$$(\measuredangle PRQ)^\circ = (\measuredangle PRO)^\circ + (\measuredangle ORQ)^\circ = a + b.$$

Tällöin kulmasummalause 5.12 sovellettuna kolmioon $\triangle PRQ$ antaa

$$\begin{aligned} 180 &= (\measuredangle QPR)^\circ + (\measuredangle PRQ)^\circ + (\measuredangle RQP)^\circ \\ &= (\measuredangle OPR)^\circ + (\measuredangle PRQ)^\circ + (\measuredangle RQO)^\circ = a + (a+b) + b = 2(a+b). \end{aligned}$$

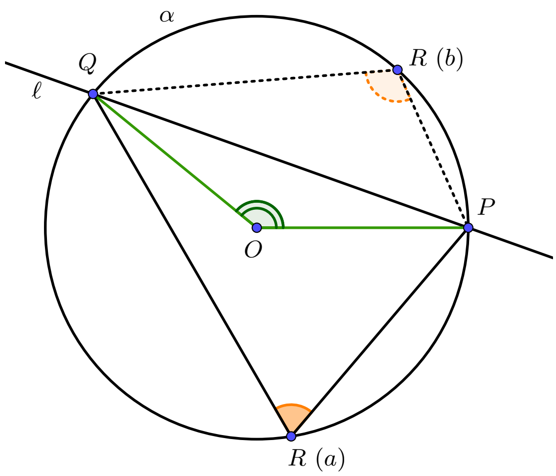
Siten $a + b = 90$, jolloin myös $(\measuredangle PRQ)^\circ = a + b = 90$. Näin ollen $\measuredangle PRQ$ on todella suora kulma (Lause 3.1), ja väite on todistettu. $\square$

Varsinainen kehäkulmalause koskee tilannetta, jossa suora ℓ ei kulje ympyrän keskipisteen O kautta. Tällöin saadaan kaksi eri tilannetta sen mukaan, ovatko pisteet O ja R suoran samalla vai eri puolilla.

Lause 8.5 (Kehäkulmalause)**.** *Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O, ja olkoon ℓ suora, joka ei kulje pisteen O kautta ja joka leikkaa ympyrää α tasan kahdessa pisteessä $P \neq Q$. Olkoon lisäksi $R \in \alpha \setminus \{P, Q\}$. Tällöin pätee:*

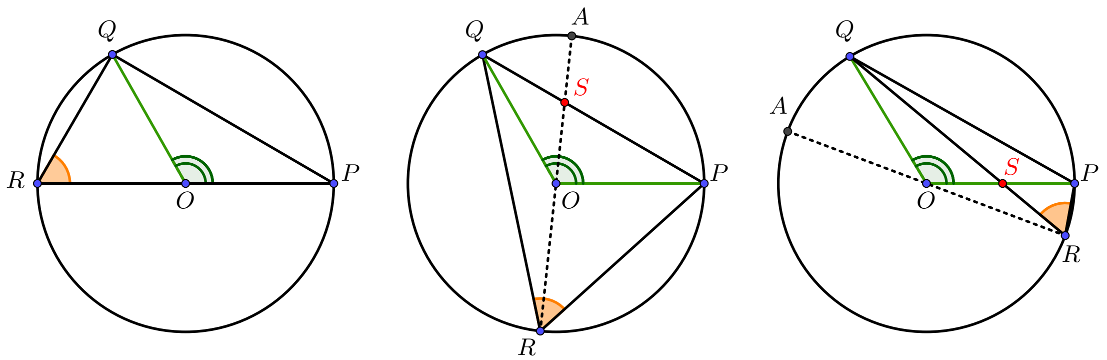
(a) Jos $RO\ell$, niin $(\measuredangle PRQ)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ$, toisin sanoen **kehäkulma** *$\measuredangle PRQ$ on suuruudeltaan puolet vastaavasta* **keskuskulmasta** *$\measuredangle POQ$.*

(b) Jos $R\ell O$, niin $(\measuredangle PRQ)^\circ = 180 - \frac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ \quad \left[= \frac{1}{2}\big(360 - (\measuredangle POQ)^\circ\big)\right]$.



Todistus. **(a)** Tutkitaan erikseen kolme tapausta ympyrän keskipisteen O sijainnin suhteen:

(i) O on kulman $\measuredangle PRQ$ kyljellä,
(ii) O on kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä,
(iii) O on kulman $\measuredangle PRQ$ ulkopuolella (toisin sanoen, O ei ole kulman sisällä eikä kulman kyljillä).



(i) (ii) (iii)

(i) Voidaan olettaa, että $O \in \overrightarrow{RP}$ (tapaus $O \in \overrightarrow{RQ}$ käsitellään aivan vastaavasti). Tällöin siis pätee $R * O * P$.

Aivan kuten Thaleen lauseen 8.4 todistuksessa, ovat kolmiot $\triangle OPQ$ ja $\triangle OQR$ tasakylkisiä, joten $(\measuredangle OPQ)^\circ = (\measuredangle OQP)^\circ = a$ ja $(\measuredangle OQR)^\circ = (\measuredangle ORQ)^\circ = b$, ja lisäksi $a + b = 90$.

Tällöin kulmasummalause 5.12 sovellettuna kolmioon $\triangle OPQ$ antaa

$$(\measuredangle POQ)^\circ = 180 - 2a = 2(90 - a) = 2b = 2(\measuredangle PRQ)^\circ,$$

mikä todistaa väitteen tapauksessa (i).

(ii) Valitaan piste A siten, että $R * O * A$ ja $|OA| = |OR|$, jolloin siis $A \in \alpha$. Merkitään $\ell' = \overleftrightarrow{PA}$. Koska $R * O * A$, on $OR\ell'$ ja lisäksi O on kulman $\measuredangle PRA$ kyljellä, joten tapauksen (i) nojalla pätee $(\measuredangle PRA)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle POA)^\circ$.

Aivan vastaavasti päätellään, että myös $(\measuredangle QRA)^\circ = \frac{1}{2}(\measuredangle QOA)^\circ$. Koska O on kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä ja $R * O * A$, on myös A on kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä. Lisäksi A on myös kulman $\measuredangle POQ$ sisällä, mikä perustellaan seuraavasti: Koska O on kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä, leikkaa puolisuora $\overrightarrow{RO}$ janan PQ aksiooman (A9) nojalla eli on olemassa piste $S \in \overrightarrow{RO}$ siten, että $P * S * Q$. Tällöin piste S on kulman $\measuredangle POQ$ sisällä. Toisaalta oletuksen mukaan $RO\ell$ ja nyt siis $S \in \overleftrightarrow{PQ} = \ell$ ja $S \in \overrightarrow{RO}$, jolloin välttämättä $R * O * S$. Koska myös $R * O * A$, täytyy olla $A \in \overrightarrow{OS}$. Tästä seuraa, että myös piste A on kulman $\measuredangle POQ$ sisällä, kuten haluttiinkin.

Koska A on kulmien $\measuredangle PRQ$ ja $\measuredangle POQ$ sisällä, saadaan (KMA)(b) avulla, että

$$(\measuredangle PRQ)^\circ = (\measuredangle PRA)^\circ + (\measuredangle QRA)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle POA)^\circ + \tfrac{1}{2}(\measuredangle QOA)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ,$$

mikä todistaa väitteen tässä tapauksessa.

(iii) Tämä tapaus käsitellään samaan tapaan kuin tapaus (ii) eli valitaan jälleen piste A siten, että $R * O * A$ ja $A \in \alpha$. Koska O ei ole kulman $\measuredangle PRQ$ sisällä, voidaan olettaa, että $O\overleftrightarrow{RQ}P$ (muuten täytyy olla $O\overleftrightarrow{RP}Q$, ja tämä tapaus käsitellään aivan vastaavasti).

Tällöin on siis olemassa piste $S \in \overleftrightarrow{RQ}$ siten, että $O * S * P$. Koska $O * S * P$, on $|OS| < |OP| = r$ ja siten piste S on ympyrän α sisällä. Toisaalta koska $S \in \overleftrightarrow{RQ}$ ja $R, Q \in \alpha$, täytyy olla $R*S*Q$ (harjoitustehtävä). Näistä tiedoista seuraa, että S, ja siten myös Q, on kulman $\measuredangle PRO = \measuredangle PRA$ sisällä. Vastaavasti tiedoista $O*S*P$ ja $R * S * Q$ saadaan aksiooman (A5) avulla, että $Q\overleftrightarrow{PO}A$ ja $Q\overleftrightarrow{AO}P$, joten Q on myös kulman $\measuredangle POA$ sisällä.

Nyt tapaus (i) soveltuu kulmiin $\measuredangle PRA$ ja $\measuredangle QRA$, ja näin ollen (KMA)(b) avulla saadaan, että

$$(\measuredangle PRQ)^\circ = (\measuredangle PRA)^\circ - (\measuredangle QRA)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle POA)^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle QOA)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ,$$

kuten haluttiinkin.

(b) Tämä kohta jätetään harjoitustehtäväksi; ideana on käyttää kulmasummalausetta 5.12 tasakylkisiin kolmioihin $\triangle OPR$ ja $\triangle OQR$. $\square$

Kirjataan vielä erikseen Lauseen 8.5 tärkeä seuraus:

Lause 8.6. *Olkoon α ympyrä ja olkoon ℓ suora, joka leikkaa ympyrää α tasan kahdessa pisteessä $P \neq Q$. Jos $R, R' \in \alpha \setminus \{P, Q\}$ ja $RR'\ell$, niin $\measuredangle PRQ \cong \measuredangle PR'Q$.*

Toisin sanoen, kaikki samaa ympyrän kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhteneviä.

Todistus. Jos ympyrän α keskipiste O on suoralla $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$, ovat kulmat $\measuredangle PRQ$ ja $\measuredangle PR'Q$ Thaleen lauseen 8.4 perusteella suoria kulmia, ja väite seuraa.

Oletaan sitten, että $O \notin \ell$. Jos $RO\ell$, on oletuksen $RR'\ell$ ja (A5)(a) nojalla myös $R'O\ell$. Siten kehäkulmalauseen 8.5 (a)-kohdan nojalla

$$(\measuredangle PRQ)^\circ = \tfrac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ = (\measuredangle PR'Q)^\circ.$$

Jos taas $R\ell O$, on oletuksen $RR'\ell$ ja Lauseen 2.5 nojalla myös $R'\ell O$, joten kehäkulmalauseen 8.5 (b)-kohdan nojalla

$$(\measuredangle PRQ)^\circ = 180 - \tfrac{1}{2}(\measuredangle POQ)^\circ = (\measuredangle PR'Q)^\circ.$$

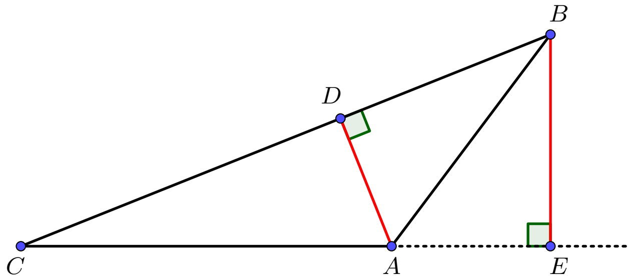
Siispä näissäkin tapauksissa $\measuredangle PRQ \cong \measuredangle PR'Q$ (KMA)(a) perusteella. $\square$

9. Kolmion merkilliset pisteet ja Cevan lause

Kootaan tähän viimeiseen lukuun vielä muutamia mielenkiintoisia kolmioihin liittyviä tuloksia.

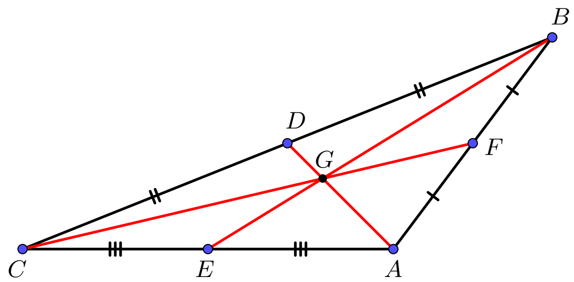
Määritelmä. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon $D \in \overleftrightarrow{BC}$ siten, että $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Tällöin jana AD on kolmion $\triangle ABC$ (eräs) **korkeusjana**. Muut korkeusjanat BE ja CF saadaan vastaavasti.

Huomaa, että Lauseen 5.3 nojalla korkeusjanat ovat olemassa ja yksikäsitteiset.



Kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat AD ja BE

Määritelmä. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon D sivun BC keskipiste. Tällöin jana AD on kolmion $\triangle ABC$ (eräs) **keskijana** eli **mediaani**. Muut keskijanat BE ja CF saadaan vastaavasti.



Kolmion $\triangle ABC$ keskijanat AD, BE ja CF sekä näiden leikkauspiste G

Monet kolmioihin liittyvät janat (tai suorat), kuten korkeusjanat ja keskijanat, kulkevat ”merkillisesti” aina saman pisteen kautta. Tällaisia leikkauspisteitä kutsutaankin usein **kolmion merkillisiksi pisteiksi**. Jo antiikin aikaan tiedettiin, että kolmion keskinormaalit, kulmien puolittajat, keskijanat ja korkeusjanat (tai näiden jatkeet) leikkaavat toisensa aina samoissa pisteissä. Myöhemmin on löydetty paljon lisää merkillisiä pisteitä, esimerkiksi *Fermat'n piste*, *Napoleonin piste* ja *mittenpunkt*.

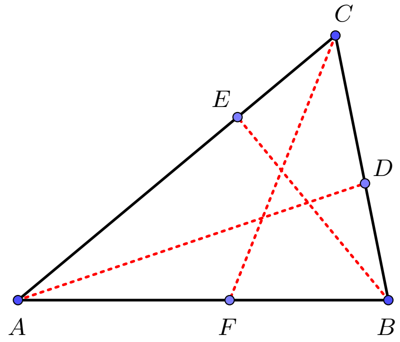
Lause 9.1 (Kolmion merkillisiä pisteitä)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Tällöin toisensa samassa pisteessä leikkaavat kolmion $\triangle ABC$*

(a) *keskijanat*
(b) *kulmien puolittajat*
(c) *keskinormaalit*
(d) *korkeusjanat (tai niiden jatkeet tylppäkulmaisessa kolmiossa).*

Useiden merkillisten pisteiden olemassaolo voidaan osoittaa seuraavan Cevan lauseen avulla. Tämä antaa yleisen kriteerin sille, milloin kolmion kärjistä vastakkaisille sivuille piirretyt janat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Lauseen julkaisi alun perin italialainen Giovanni Ceva vuonna 1678, joten se on noin 2000 vuotta nuorempi kuin muut kurssin perustulokset.

Lause 9.2 (Cevan lause)**.** *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoot pisteet D, E ja F kolmion sivuilla siten, että $A * F * B$, $B * D * C$ ja $C * E * A$. Tällöin janat AD, BE ja CF kulkevat saman pisteen G kautta jos ja vain jos*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$



Cevan lauseen todistus vaatii hieman valmisteluja, joten se esitetään vasta luvun lopussa. Käsitellään ensin merkillisten pisteiden olemassaolotodistus.

Lauseen 9.1 todistus. (a) Tämä on Cevan lauseen helppo seuraus: Olkoot D, E ja F sivujen BC, AC ja AB keskipisteet, vastaavassa järjestyksessä. Tällöin $|AF| = |FB|$ ja vastaavasti muille sivuille, ja siten

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

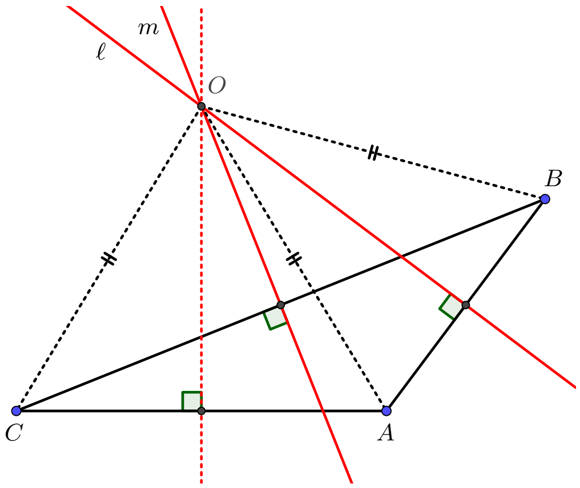
Näin ollen janat AD, BE ja CF todella leikkaavat toisensa samassa pisteessä Cevan lauseen nojalla. (Vertaa keskijanojen määritelmän yhteydessä olevaan kuvaan.)

(b) Harjoitustehtävä; tässä on esimerkiksi mahdollista käyttää Cevan lausetta ja kulmanpuolittajalausetta.

(c) Huomaa, että tässä ei ole mahdollista käyttää Cevan lausetta, koska keskinormaalit eivät (yleensä) kulje kolmion kärkien kautta. Tarvitaan siis toisenlainen perustelu:

Osoitetaan ensin, että sivujen AB ja BC keskinormaalit ℓ ja m todella leikkaavat. Tehdään antiteesi, että olisikin $\ell \parallel m$. Koska $\ell \perp \overleftrightarrow{AB}$, niin myös suorat m ja $\overleftrightarrow{AB}$ leikkaavat (Lause 5.10), ja itse asiassa käänteisen vuorokulmalauseen 5.11 nojalla tällöin täytyy olla myös $m \perp \overleftrightarrow{AB}$. Mutta nyt pisteen B kautta kulkee suoralle m normaalit $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$, jolloin normaalin yksikäsitteisyyden (Lause 5.3) perusteella täytyy olla $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä pisteet A, B ja C muodostavat kolmion ja eivätkä siten voi olla samalla suoralla.

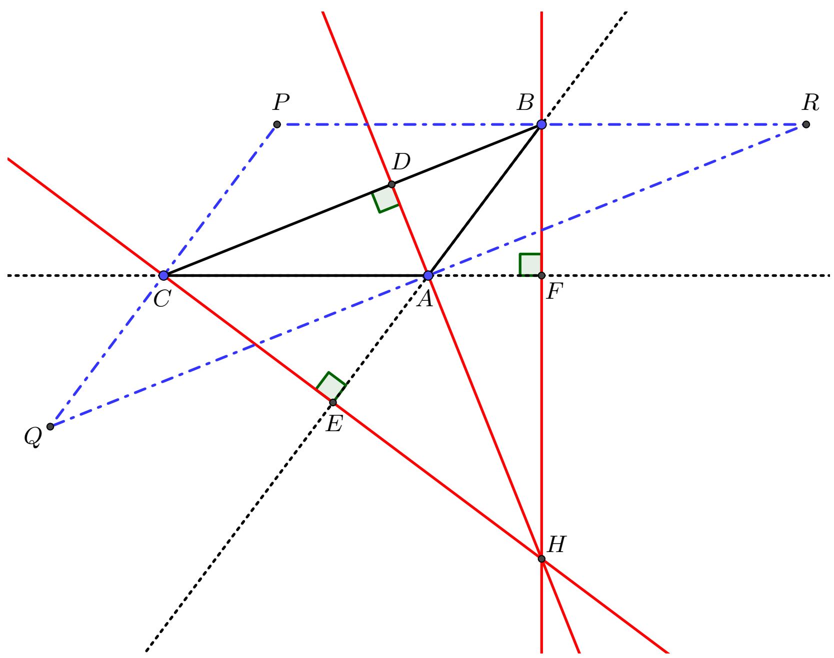
Näin ollen sivujen AB ja BC keskinormaalien leikkauspiste O on olemassa. Tällöin Lauseen 3.10 nojalla piste O on yhtä kaukana kummankin janan päätepisteistä, joten $|AO| = |BO|$ ja $|BO| = |CO|$. Siispä myös $|AO| = |CO|$, jolloin saman Lauseen 3.10 toisen suunnan nojalla piste O myös janan AC keskinormaalilla. Niinpä kaikki kolmion keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä O.



(d) Jos kolmion $\triangle ABC$ kaikki kulmat ovat teräviä, voidaan tässäkin käyttää Cevan lausetta; ideana on etsiä sopivia yhdenmuotoisia ja suorakulmaisia kolmioita, joiden avulla voidaan osoittaa, että haluttu suhteiden tulo on todella 1 (yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi).

Yleisemmin korkeusjanojen leikkauspiste saadaan seuraavasti:

Valitaan Lauseen 5.2 nojalla suorat ℓ, m ja n siten, että $A \in \ell$ ja $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $B \in m$ ja $m \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ja $C \in n$ ja $n \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Tällöin suorat ℓ, m ja n leikkaavat toisensa Lauseen 5.10(b)-kohdan nojalla. Olkoot nämä leikkauspisteet $P = m \cap n$, $Q = \ell \cap n$ ja $R = \ell \cap m$.



Tällöin $\square AQCB$ ja $\square ARBC$ ovat suunnikkaita, jolloin Lauseen 5.13 perusteella $|AQ| = |BC| = |AR|$. Siispä piste A on janan QR keskipiste. Vastaavasti nähdään, että piste B on janan PR keskipiste ja C on janan PQ keskipiste.

Olkoon AD kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana, jolloin siis $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Mutta koska $\ell \parallel \overleftrightarrow{BC}$, seuraa käänteisestä vuorokulmalauseesta 5.11, että myös $\overleftrightarrow{AD} \perp \ell$. Koska A on janan QR keskipiste, on suora $\overleftrightarrow{AD}$ siis janan QR keskinormaali, ja vastaava pätee myös muille kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanoja vastaaville suorille $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{CF}$. Näin ollen (c)-kohdan nojalla suorat $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ ja $\overleftrightarrow{CF}$ (eli kolmion $\triangle PQR$ keskinormaalit) leikkaavat toisensa samassa pisteessä, aivan kuten haluttiinkin. $\square$

Huomautus 9.3 (Merkillisten pisteiden ominaisuuksia)**.** Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Olkoon G tämän kolmion keskijanojen leikkauspiste eli **painopiste**, H korkeusjanojen leikkauspiste eli **ortokeskus**, O keskinormaalien leikkauspiste ja P kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Lauseen 9.1 (c)-kohdan todistuksesta nähtiin, että piste O on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä, joten ympyrä α, jonka keskipiste on O ja säde on $|OA|$, kulkee kolmion kaikkien kärkien kautta. Tällöin sanotaankin, että ympyrä α on kolmion $\triangle ABC$ **ympäri piirretty ympyrä**. Kehäkulmalauseen avulla on melko helppo osoittaa, että tämän ympyrän säde on $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC|}{\sin(\measuredangle A)}$. Huomaa, että sinilauseen nojalla suhde $\frac{|BC|}{\sin(\measuredangle A)}$ on sama kolmion kaikille sivu–kulma-pareille.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että piste P on yhtä kaukana kaikista kolmion sivuista. Tarkemmin sanottuna, olkoot pisteet D, E ja F siten, että $\overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{PE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ja $\overleftrightarrow{PF} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Tällöin $|PD| = |PE| = |PF|$. Siten ympyrä β, jonka keskipiste on P ja säde on $|PD|$, sivuaa kaikkia kolmion $\triangle ABC$ sivuja, ja sanotaan, β on kolmion $\triangle ABC$ **sisään piirretty ympyrä**.

Huomionarvoista on myös, että näistä klassisista merkillisistä pisteistä O, G ja H ovat aina samalla suoralla eli niin sanotulla **Eulerin suoralla**, ja lisäksi näille pätee, että $|GH| = 2|GO|$; näiden todistukset kuitenkin ohitetaan tällä kurssilla.

Tarvitsemme Cevan lauseen 9.2 todistuksessa apuna kolmioiden pinta-aloja. Seuraava aputulos takaa, että kolmion pinta-alaa laskiessa ei ole väliä, mikä kolmion sivuista valitaan "kannaksi", jota vasten kolmion korkeusjana asetetaan.

Lemma 9.4. *Olkoot AD, BE ja CF kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat. Tällöin*

$$|BC||AD| = |AC||BE| = |AB||CF|.$$

Todistus. Jos $D = B$, on $\measuredangle ABC$ suora kulma, ja tällöin siis itse asiassa myös $F = D = B$. Näin ollen

$$|BC||AD| = |FC||AB| = |AB||CF|,$$

ja vastaava pätee, jos oletetaan, että $F = B$.

Voidaan siis olettaa, että $D \neq B \neq F$. Jos $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ on terävä, täytyy tällöin olla $D \in \overrightarrow{BC}$ ja $F \in \overrightarrow{BA}$ (muuten saadaan ristiriita ulkokulmaepäyhtälön kanssa). Tällöin kolmiot $\triangle ADB$ ja $\triangle CFB$ ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kulma $\measuredangle ABD = \measuredangle FBC$, jolloin (KK)-säännön nojalla $\triangle ADB \sim \triangle CFB$. Jos taas $\measuredangle B = \measuredangle ABC$ on tylppä, täytyy olla $D * B * C$ ja $F * B * A$. Tällöin kolmiot

$\triangle ADB$ ja $\triangle CFB$ ovat suorakulmaisia ja ristikulmina $\measuredangle ABD \cong \measuredangle CBF$, joten tällöinkin (KK)-säännön nojalla $\triangle ADB \sim \triangle CFB$. Siispä molemmissa tapauksissa $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|CF|}$, mistä saadaan $|BC||AD| = |AB||CF|$.

Aivan vastaavasti osoitetaan, että myös $|AC||BE| = |AB||CF|$, ja väite on todistettu. □

Määritelmä. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon AD kolmion $\triangle ABC$ korkeusjana. Tällöin kolmion $\triangle ABC$ **pinta-ala** määritellään asettamalla

$$\mathrm{Ala}(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2}|BC||AD|.$$

Huomautus 9.5. Kuten jo todettiin, Lemman 9.4 nojalla pinta-ala on hyvin määritelty koska se ei riipu kolmion ”kannan” ja ”korkeuden” valinnasta.

Yleisemmät monikulmiot voidaan aina jakaa kolmioiksi, ja nyt monikulmion pinta-ala voitaisiin määritellä näiden osakolmioiden pinta-alojen summaksi; tällöin pitäisi toki esimerkiksi osoittaa, että pinta-ala ei riipu siitä, *miten* monikulmio jaetaan kolmioiksi.

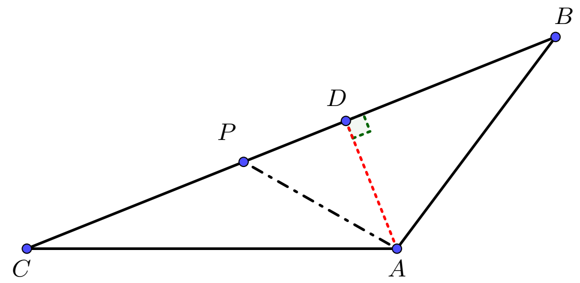
Kolmion pinta-alan määritelmässä oleva kerroin $\frac{1}{2}$ selittyy luonnollisesti sillä, että suorakulmion $\square ABCD$ pinta-alaksi halutaan vastakkaisten sivujen pituuksien tulo $|AB| \cdot |CD|$. Tähän kaavaan päädytäänkin, kun suorakulmio jaetaan lävistäjänsä avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Tarkemmin monikulmioiden pinta-aloja koskeviin tarkasteluihin ei tällä kurssilla kuitenkaan mennä.

Janamitan additiivisuudesta saadaan helposti seuraava kolmioiden pinta-alojen additiivisuusominaisuus.

Lemma 9.6. *Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon $B * P * C$. Tällöin*

$$\mathrm{Ala}(\triangle ABC) = \mathrm{Ala}(\triangle ABP) + \mathrm{Ala}(\triangle ACP).$$



Todistus. Koska (JMA)(b)-kohdan nojalla $|BC| = |BP| + |PC|$, saadaan pinta-alan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\mathrm{Ala}(\triangle ABP) + \mathrm{Ala}(\triangle ACP) &= \tfrac{1}{2}|BP||AD| + \tfrac{1}{2}|CP||AD| \\ &= \tfrac{1}{2}\big(|BP| + |CP|\big)|AD| \\ &= \tfrac{1}{2}|BC||AD| = \mathrm{Ala}(\triangle ABC).\end{aligned}$$

□

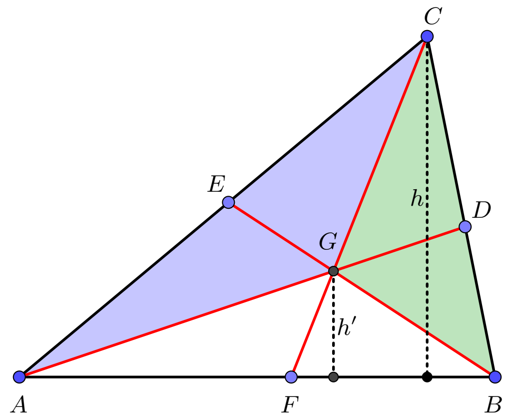
Nyt voidaan viimein todistaa myös Cevan lause.

Cevan lauseen 9.2 todistus. "⇒" Oletetaan siis, että kaikki janat AD, BE ja CF kulkevat pisteen G kautta, jolloin esimerkiksi $C * G * F$. Siten Lemman 9.6 nojalla

$$\text{Ala}(\triangle ACG) = \text{Ala}(\triangle ACF) - \text{Ala}(\triangle AFG),$$

ja vastaavasti

$$\text{Ala}(\triangle BCG) = \text{Ala}(\triangle BCF) - \text{Ala}(\triangle BFG).$$



Kuvassa $\frac{\text{Ala}(\triangle ACG)}{\text{Ala}(\triangle BCG)} = \frac{|AF|}{|FB|}$

Koska $F \in \overleftrightarrow{AB}$, on kolmioilla $\triangle ACF$ ja $\triangle BCF$ sama suoran $\overleftrightarrow{AB}$ vastainen korkeusjana, olkoon sen pituus h. Samoin kolmioilla $\triangle AFG$ ja $\triangle BFG$ on sama suoran $\overleftrightarrow{AB}$ vastainen korkeusjana, olkoon sen pituus h'. Tällöin

$$\frac{\text{Ala}(\triangle ACF)}{\text{Ala}(\triangle BCF)} = \frac{\frac{1}{2}|AF|h}{\frac{1}{2}|BF|h} = \frac{|AF|}{|FB|},$$

ja vastaavasti

$$\frac{\text{Ala}(\triangle AFG)}{\text{Ala}(\triangle BFG)} = \frac{\frac{1}{2}|AF|h'}{\frac{1}{2}|BF|h'} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Tällöin pätee, että myös

$$\frac{\text{Ala}(\triangle ACG)}{\text{Ala}(\triangle BCG)} = \frac{\text{Ala}(\triangle ACF) - \text{Ala}(\triangle AFG)}{\text{Ala}(\triangle BCF) - \text{Ala}(\triangle BFG)} = \frac{|AF|}{|FB|},$$

mikä nähdään seuraavasta pienestä laskusta:

Jos $\frac{a}{b} = x = \frac{c}{d}$ (ja $b \neq d$), niin $a = bx$ ja $c = dx$, ja tällöin myös

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{bx-dx}{b-d} = \frac{(b-d)x}{b-d} = x.$$

Nyt siis

$$\frac{\text{Ala}(\triangle ACG)}{\text{Ala}(\triangle BCG)} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Aivan vastaavasti saadaan, että

$$\frac{\text{Ala}(\triangle ABG)}{\text{Ala}(\triangle ACG)} = \frac{|BD|}{|DC|} \quad \text{ja} \quad \frac{\text{Ala}(\triangle BCG)}{\text{Ala}(\triangle ABG)} = \frac{|CE|}{|EA|}.$$

Näin ollen

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{\mathrm{Ala}(\triangle ACG)}{\mathrm{Ala}(\triangle BCG)}\cdot\frac{\mathrm{Ala}(\triangle ABG)}{\mathrm{Ala}(\triangle ACG)}\cdot\frac{\mathrm{Ala}(\triangle BCG)}{\mathrm{Ala}(\triangle ABG)}=1,$$

koska pinta-alojen tulossa jokainen kolmioista esiintyy kerran sekä osoittajassa että nimittäjässä.

"$\Leftarrow$" Oletetaan siis, että $\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1$.

Nyt pätee $A\overleftrightarrow{BE}D$ (koska $A\overleftrightarrow{BE}C$ ja $CD\overleftrightarrow{BE}$) ja vastavaasti $B\overleftrightarrow{AD}E$, joten janat AD ja BE leikkaavat pisteessä G, jolle siis pätee $A*G*D$ ja $B*G*E$. Osoitetaan, että myös jana CF kulkee tämän saman pisteen G kautta.

Koska $A*G*D$, on piste G kulman $\measuredangle ACD=\measuredangle ACB$ sisällä, ja tällöin (A9) nojalla puolisuora $\overrightarrow{CG}$ leikkaa janan AB; olkoon leikkauspiste F', jolloin siis $A*F'*C$. Selvästi pätee $F'\overleftrightarrow{BE}C$, jolloin täytyy olla $C*G*F'$. Näin ollen janat AD, BE ja CF' leikkaavat pisteessä G, joten jo todistetun suunnan ja oletuksen nojalla

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1=\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}.$$

Siispä täytyy olla

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}=\frac{|AF|}{|FB|},$$

ja koska $A*F*B$ ja $A*F'*B$, pätee (JMA)(b) nojalla

$$\frac{|AF'|}{|AB|-|AF'|}=\frac{|AF|}{|AB|-|AF|}.$$

Tästä saadaan ristiin kertomalla

$$|AF'||AB|-|AF'||AF|=|AF||AB|-|AF||AF'|,$$

joten

$$|AF'||AB|=|AF||AB|.$$

Koska $|AB|>0$, täytyy tällöin olla $|AF'|=|AF|$. Mutta koska $F,F'\in\overrightarrow{AB}$ on tällöin (A6) yksikäsitteisyysosan nojalla $F=F'$. Näin ollen myös jana $CF=CF'$ kulkee todella pisteen G kautta, kuten haluttiinkin. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Eukleides Aleksandialainen, *Alkeet, Kuusi ensimmäistä kirjaa eli Tasogeometria*, suomentanut Pekka Aschan, nykysuomentanut ja kommentoinut Lauri Kahanpää, Kopi-Jyvä, Jyväskylä, 2011.

[2] Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg. Vol. I: Introduction and Books I, II. Vol. II: Books III–IX. Vol. III*, translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[3] Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, third edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

[4] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] Harold R. Jacobs, *Geometry*, second edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[6] Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen ja Lauri Kahanpää, *Geometria*, luentomoniste, Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2008.

[7] Edwin E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, third edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1990.

Liite A. Kurssin aksioomat tasogeometrialle

(A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora ℓ siten, että $P \in \ell$ ja $Q \in \ell$.

(A2) Jokaisella suoralla on ainakin kaksi eri pistettä.

(A3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

(A4) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$. Jos lisäksi A, B ja C ovat suoran ℓ eri pisteitä, niin **täsmälleen** yksi seuraavista on voimassa: $C * A * B$, $A * C * B$ tai $A * B * C$.

(A5) Olkoon ℓ suora ja olkoot A, B, C pisteitä, jotka eivät ole suoralla ℓ.

(a) Jos $AB\ell$ ja $BC\ell$, niin $AC\ell$.
(b) Jos $A\ell B$ ja $B\ell C$, niin $AC\ell$.

(A6) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

(A7) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

(A8) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $AB \cong DE$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ ja $BC \cong EF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(A9) ("Puomilause") Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja olkoon piste P kulman $\measuredangle ABC$ sisällä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BP}$ leikkaa janaa AC eli on piste $D \in \overrightarrow{BP}$ siten, että $A * D * C$.

(JMA) Jokaisella janalla AB on **pituus** $|AB| > 0$ siten, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(a) $AB \cong CD \iff |AB| = |CD|$
(b) $A * B * C \iff |AC| = |AB| + |BC|$
(c) Jos $r \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$, niin on olemassa pisteet P ja Q siten, että $|PQ| = r$.

(KMA) Jokaisella kulmalla $\measuredangle ABC$ on **astemitta** $0 < (\measuredangle ABC)^\circ < 180$ siten, että

(a) $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
(b) Jos piste D on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä, niin
$$(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$$
(c) Vieruskulmien astemittojen summa on 180.

(PA) Olkoon ℓ suora ja P piste, joka ei ole suoralla ℓ. Tällöin on olemassa **korkeintaan** yksi suora, joka kulkee pisteen P kautta ja on yhdensuuntainen suoran ℓ kanssa.

Liite B. Eukleideen aksioomat tasogeometrialle

Eulkeides esitti kirjassaan *Alkeet* seuraavat viisi geometrista *postulaattia*. (Myöhemmin näitä on alettu kutsua aksioomiksi.)

(EA1) Kahden pisteen välille voidaan piirtää suora (ts. jana).

(EA2) Jana voidaan jatkaa suoraksi.

(EA3) Annettu piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä minkä tahansa pisteen kautta.

(EA4) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

(EA5) Jos kahta suoraa leikkaavan suoran leikkauskulmat suorien kanssa ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, nämä kaksi suoraa leikkaavat toisensa sillä puolella, jolla kulmat ovat vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.

(Vertaa tätä (EA5) muotoilua Huomautukseen 5.9.)

Näiden geometristen postulaattien lisäksi Eukleides listasi muutamia yleisesti voimassa olevia ”itsestäänselviä” periaatteita, joista hän käytti nimitystä *aksiooma*:

- Saman kanssa yhtäsuuret ovat myös keskenään yhtäsuuret.
- Jos yhtäsuuriin lisätään yhtäsuuret, saadaan yhtäsuuret.
- Jos yhtäsuurista vähennetään yhtäsuuret, saadaan yhtäsuuret.
- Toisiinsa yhtyvät suureet ovat yhtäsuuret.
- Kokonaisuus on osaansa suurempi.

Eukleideen olettamusten (postulaatit ja aksioomat) suurimmat puutteet ovat, että ne eivät ota mitään kantaa pisteiden järjestykseen tai sijaintiin suoriin nähden ja että niissä ei ole mukana kolmioiden yhtenevyyteen liittyvää aksioomaa. Eukleides kyllä antoi heti Alkeiden alussa, Lauseessa 1.4, todistuksen (SKS)-säännölle, mutta todistuksessa vedotaan ”siirtämisen” periaatteeseen, joka taas ei seuraa pelkästään Eukleideen asettamista perusolettamuksista.

Jos nämä puutteet paikataan ja lisäksi täsmennetään vähän Eukleideen tapaa käsitellä janojen, kulmien ja kuvioiden (eli pinta-alojen) yhtäsuuruutta, saadaan Alkeissa esiintyvät tulokset ja todistukset suurelta osin yhteensopiviksi tälläkin kurssilla esitetyn tasogeometrian teorian kanssa. Kovin monella tieteen alalla ei näin voi todeta yli 2000 vuotta vanhasta teoksesta!