Johdatus reaalifunktioihin

11. syyskuuta 2014 10:28

1. Reaaliluvut ja epäyhtälöt

1.1 Lukualueet

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ luonnollisten lukujen joukko

Suljettu yhteen ja kertolaskujen suhteen:
Jos m,n eN (eli m eN ja neN), niin myös m + n eN ja m*n = mn eN

Vähennyslaskua ei voi määritellä.

Huom.
Tällä kurssilla voidaan tarvittaessa merkitä $\mathbb{N} > \{1,2,3\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$ = {-3,-2,-1,0,1,2,3} kokonaislukujen joukko
(zahlen)
Suljettu yhteen-, vähennys- ja kertolaskujen suhteen.
Jakolaskua ei voi määritellä.

$\mathbb{Q}$ = { m/n : m,n eZ, n ≠ 0 } rationaalilukujen joukko
(quotions)
Suljettu peruslaskutoimitusten suhteen (+ - * /).
Muista, että rationaaliluvuille q = m/n ja p = k/l pätee

q + p = m/n + k/l = (ml + nk)/nl eQ

qp = m/n * k/l = mk/nl eQ

q/p = (m/n) / (k/l) = (m/n) * (l/k) = ml / nk eQ

Q on monella tapaa "epätäydellinen":

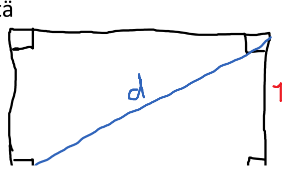
Esim1

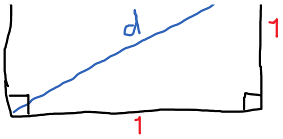
Luvut $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \ldots$ ovat rationaalilukuja kaikille neN, mutta raja-arvo e = $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ei ole rationaaliluku.
(tätä ei tosin vielä osata perustella)

Esim2

Ei ole olemassa rationaalilukua qeQ,
jolle pätee $q^2 = 2$ (ts $q = \sqrt{2}$)
Tämä on todistettu Johdatus matematiikkaan -kurssilla.
(Myöhemmin tälle esitetään myös vaihtoehtoinen todistus).

Huomaa, että

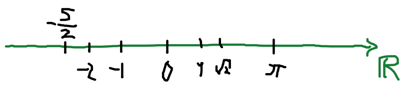




yksikköneliön lävistäjälle d pätee d^2 = 1 + 1 = 2 (pythagoras), joten erityisesti $d \notin \mathbb{Q}$

R = reaalilukujen joukko
(real numbers)

Irrationaaliluvut R\Q täydentävät "Q:n reiät".
Emme varsinaisesti määrittele reaalilukuja tällä kurssilla, vaan ajattelemme
reaalilukuja lukusuoran pisteinä. (Määrittely Q:n avulla tehdään esim. kursseilla "Lukualueet" JA
"Algebra")



Esim3

Ei ole olemassa reaalilukua xeR, jolle pätee

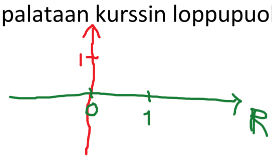
$$x^2 = -2$$

Tällä yhtälöllä on kuitenkin ratkaisu vielä isommassa lukualueessa:

$\mathbb{C}$ = { x + iy : x,yeR} kompleksilukujen joukko, missä imaginääriyksikölle i pätee

$$i^2 = -1$$

Kompleksilukuihin palataan kurssin loppupuolella.



Huom. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2 Reaaliluvut

Reaalilukujen yhteen- ja kertolasku toteuttavat seuraavat peruslaskusäännöt
(aksioomat)

A. Algebralliset ominaisuudet

$\boxed{a + b = b + a}$ ja $\boxed{ab = ba}$ kaikille a,beR
(kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus)

$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$ ja
$\boxed{(ab)c = a(bc)}$ kaikille a,b,ceR
(assosiatiivisuus eli liitännäisyys)

$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$ kaikille a,b,ceR
(ja samoin (b+c)a = ba+ca)
(distributiivisuus eli osittelulaki)

Reaaliluvuille 0 ja 1 pätee
a + 0 = a
a * 1 = a
kaikille aeR

Jokaisella reaaliluvulla aeR on vastaluku -a ja jokaisella aeR, a≠0, on käänteisluku a^(-1), joille pätee

a + (-a) = 0

a * a^(-1) = 1. (Merkitään myös $a^{-1} = \frac{1}{a}$)

Ominaisuuksista A voidaan johtaa kaikki muut tarvittavat laskusäännöt:

Esim.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = aa + \underbrace{ba}_{ab} + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$1ab + 1ab$
$= (1+1)ab = 2ab$

lisäksi määritellään vähennys- ja jakolasku asettamalla

$a - b = a + (-b)$ kaikille a,beR

$\frac{a}{b} = a\, b^{-1}$ kaikille a,beR, $b \neq 0$

ja potenssit asettamalla

$a^1 = a$, $a^2 = a\,a$, $a^3 = a\,a^2$, , $a^{k+1} = a\,a^k$ kaikille keN

Esim.

Kun a,beR $a \neq 0$ $b \neq 0$
niin osoita, että

$(ab)^{-1} = a^{-1}\, b^{-1}$

Todistus

Koska $(ab)(a^{-1}\, b^{-1}) = \underbrace{a\,a^{-1}}_{1}\, \underbrace{b\,b^{-1}}_{1} = 1\; 1 = 1$

niin $a^{-1}\, b^{-1}$ on todella luvun ab käänteisluku.

Esim2.

Kun a,b,c,deR b≠0, d≠0, niin osoita, että

$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Todistus

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = (a\,b^{-1})(c\,d^{-1}) = ac\,\underbrace{(b^{-1}\,d^{-1})}_{=(bd)^{-1}} = ac\,(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

B. Järjestysominaisuudet

Reaaliluvuilla on luonnollinen järjestysrelaatio "<", jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) Kun a,beR, niin täsmälleen yksi seuraavista on voimassa:
a < b, a = b tai b < a

ii) Jos a,b,ceR ja a < b ja b < c, niin a < c. (transitiivisuus)

iii) Jos a,b,ceR ja a < b, niin a + c < b + c.

iv) Jos a,beR ja 0<a, 0<b, niin ab > 0.

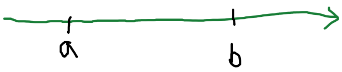
Merkintöjä: a > b tarkoittaa samaa kuin b < a (eli voidaan kirjoittaa a>b <=> b<a)
a <= b tarkoittaa, että a<b tai a=b (ja b>=a tarkoittaa samaa).

Esim1.

2 <= 3, 2 <= 2 ja 3 > 2 ovat kaikki tosia.

Huom.
- a ≠ b <=> a < b tai a > b.
- Rationaaliluvuille p = m/n > 0 ja q = k/l > 0, missä m,n,k,leN, niin pätee
  p < q (eli m/n < k/l) täsmälleen silloin kun ml < nk.
  (eli lyhyesti m/n < k/l <=> ml < nk).

Välit ovat tärkeitä reaalilukujen osajoukkoja



Olkoot a,beR, a < b. Tällöin (rajoitettuja) välejä ovat:

[a,b] = $\{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)

]a,b[= $\{x \in \mathbb{R} \quad a < x < b\}$ (avoin väli)

[a,b[= $\{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli)

]a,b] = $\{x \in \mathbb{R} \quad a < x \leq b\}$ (puoliavoin väli)

Sovitaan lisäksi, että

[a,a] = { a } (joukko, jonka ainoa alkio on a)

]a,a[=]a,a] = [a, a[= $\emptyset$ (tyhjä joukko)

[a, ∞[= $\{x \in \mathbb{R} \quad x \geq a\}$

]$-\infty$, a[= $\{x \in \mathbb{R} \quad x < a\}$

]$-\infty$, ∞[= $\mathbb{R}$

rajoittamattomia välejä

Huom!
∞ ja $-\infty$ ovat vain symboleja, eivät reaalilukuja!

Matematiikassa epäyhtälöt ovat usein jopa tärkeämpiä kuin yhtälöt. Järjestysaksioomien B(i) - (iv) avulla saadaan epäyhtälöiden käsittelyyn muita apuvälineitä:

Lause 1.1.
Olkoot a,b,c,deR.

a) a < b jos ja vain jos b-a > 0 (eli a<b <=> b-a>0)

b) Jos a < b ja c < d, niin a+c < b+d (erityisesti jos 0 < b ja 0 < d, niin 0 < b+d)

c) Jos a < b ja c > 0, niin ac < bc.

d) Jos a < b ja c < 0, niin ac > bc.

e) Jos a ≠ 0, niin $a^2 > 0$.

f) Jos a > 0, niin $a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$.

g) Oletetaan, että a,b > 0. Tällöin a < b => $a^2 < b^2$.

h) Jos 0 < a < b, niin $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Todistus

a) Tässä pitää todistaa kaksi väitettä:

"=>" Oletetaan, että
a < b,

ja väitetään, että

b-a > 0.

Koska a<b, niin B(iii) nojalla saadaan

$a + (-a) < b + (-a)\ eli\ b - a > 0$

kuten haluttiin. $\square$

"<=" Oletus: b-a>0

Väite: a<b

Koska 0 < b - a, niin B(iii) nojalla

$\underbrace{0 + a}_{a} < b \underbrace{- a + a}_{=0}\ eli\ a < b$ $\square$

b) Oletus: a < b ja c < d

Väite: a+c < b+d

Koska a<b, niin

a+c < b+c (B(iii))

ja koska c < d, niin

$\underbrace{c+b}_{b+c}$ < d+b (B(iii))

Siispä $a + c < d + b = b + d\ (B(ii))$

c)Koska

$a < b$

niin

$b - a > 0\ (a - kohta)$

Koska myös

c > 0, niin

$\underbrace{(b - a) * c}_{=bc-ac} > 0$ (B(iv))

Siispä $bc - ac > 0$,

joten a-kohdan perusteella

$bc > ac$ $\square$

d) Harjoitustehtävä

e) Koska $a \neq 0, niin$

a > 0

tai

a < 0

Jos a > 0, niin

$a^2 = a * a > 0\ (B(iv))$

Jos a<0, niin d-kohdan perusteella (koska a < 0)

$a * a > a * 0 = 0$

eli

$a^2 > 0$

f)Koska

$a * \frac{1}{a} = 1, niin \frac{1}{a} \neq 0$

(muuten tulo = 0)

Siispä e-kohdan perusteella

$\left(\frac{1}{a}\right)^2 > 0$

ja näin ollen

$0 \underset{B(iv)}{<} a * \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \underbrace{a * \frac{1}{a}}_{1} * \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

eli

$\frac{1}{a} > 0$

$\square$

g) "=>" Harjoitustyö

"<="
Oletus: $a^2 < b^2$
Väite: a < b

Koska $a^2 < b^2, niin$
$$b^2 - a^2 > 0\ (a - kohta)$$
Siispä
$$b - a = \frac{(b-a)(b+a)}{b+a} = \frac{b^2 - a^2}{b+a} = \underbrace{(b^2 - a^2)}_{>0} * \underbrace{\frac{1}{b+a}}_{>0,\ \text{koska } b+a>0\ (\text{kohdat } b \text{ ja } f)}$$

joten
b>a (kohta a) □

h) Nyt b-a>0 (kohta (a)) ja $\frac{1}{ab} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{>0} * \underbrace{\frac{1}{b}}_{>0} > 0$

joten
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a) * \frac{1}{ab} > 0\ \big(B(iv)\big)$$

Siten
$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}\big(kohta(a)\big)$$
□

Esim.

a) Osoita, että
$$1{,}4 < \sqrt{2}$$
Todistus:
Koska
$$1.4^2 = (1+0{,}4)^2 = 1^2 + 2 + 0{,}4 + (0{,}4)^2 = 1 + 0{,}8 + 0{,}16 = 1{,}96 < 2 = \sqrt{2}^2$$

ja 1,4 > 0 ja $\sqrt{2} > 0$
joten
$$1{,}4 < \sqrt{2}$$

b) Arvioi lauseketta $\frac{1}{2x^2+3}\ kun\ xe]1{,}2]$

Ratkaisu: Kun xe]1,2] niin $1 < x \leq 2$

Tällöin $1^2 < x^2 \leq 2^2\ eli\ 1 < x^2 \leq 4\ \big(Lause\ 1.1.(g)\big)$

Siispä
$$5 = 2*1+3 < 2x^2 + 3 \leq 2*4+3 = 11$$
(B(iii), Lause 1.1. (c))
Koska kaikki luvut yllä ovat positiivisia, niin
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{2x^2+3} \geq \frac{1}{11}\big(Lause\ 1.1.(h)\big)$$

(Sama lyhyesti:

xe]1,2] => $1 < x \leq 2 \Rightarrow 1 < x^2 \leq 4 \Rightarrow 2x^2 + 3 \leq 2*4+3 = 11$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{2x^2+3} \geq \frac{1}{11}$$

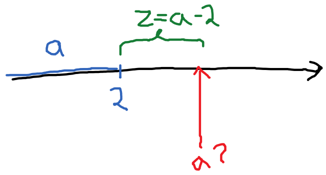
c) Oletetaan, että reaaliluku aeR on sellainen, että kaikille z > 0 on voimassa
$$a < 2 + z.$$
Osoita, että tällöin
$$a \leq 2$$
Todistus
Todistetaan väite epäsuorasti: Tehdään antiteesi, että $a \leq 2\ ei\ päde,$

jolloin siis

$a > 2.$

Tällöin

$$a - 2 > 0,$$



joten voidaan valita

$$z = a - 2 > 0.$$

Oletuksen nojalla pitää olla

$$a < 2 + z = 2 + a - 2 = a \; eli \; a < 2,$$

mikä on ristiriita.

Pitää siis olla

$$a \leq 2.$$

d)Osoitetaan, että $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (eli on irrationaaliluku)

Todistus

Tehdään antiteesi: $2^{\frac{1}{2}}$ *ei ole irrationaaliluku,*

jolloin siis $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

On siis olemassa m,neN, joille pätee

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Erityisesti siis

$$n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$$

(koska

$$n\sqrt{2} = m \in \mathbb{N})$$

Valitaan nyt $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että n_0

on pienin luonnollinen luku jolle pätee

$$n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$$

Tällöin siis

$$1 \leq n_0 \leq n$$

Merkitään

$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1)$$

Koska

$$1 < 2 < 4$$

niin

$$1 < \sqrt{2} < 2 \qquad (L\ 11\ (g))$$

Siispä

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1$$

ja kertomalla tämä n_0:lla saadaan

$$0 < \underbrace{(\sqrt{2} - 1)n_0}_{n_1} < n_0 \qquad (L\ 11\ (c))$$

Toisaalta

$$n_1 = \underbrace{n_0\sqrt{2}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{n_0}_{\in \mathbb{Z}} \qquad ja \qquad n_1 > 0$$

joten $n_1 \in \mathbb{N}$

ja lisäksi

$$n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = n_0(\sqrt{2})^2 - n_0\sqrt{2} = \underbrace{2n_0}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{n_0\sqrt{2}}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

Siten n0 ei olisikaan pienin luonnollinen luku, jolle

$$n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$$

(sillä

$$n_1 < n_0 \quad ja \quad n_1\sqrt{2} \in \mathbb{N})$$

Siispä

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$\square$

Huom.

Kun aeR, niin

$$-a = (-1) * a,$$

sillä

$$a + (-1) * a = 1 * a + (-1) * a = \underbrace{(1 + (-1))}_{=0} * a = 0 * a = 0$$

Algebrallisten ja järjestysaksioomien (A) ja (B) lisäksi reaaliluvuille pätee:

C. Täydellisyysaksiooma

Jokaisella ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa pienin yläraja (eli supremum)
$\sup A \in \mathbb{R}$
Tähän palataan kurssilla raja-arvot ja jatkuvuus (RAJ).

Esim.

Kun $A = [0,1], niin \sup A = \max A = 1$
Kun $A =]0,1[$, niin maksimia (eli suurinta alkiota) ei ole olemassa, mutta $\sup A = 1$)

Otetaan nyt jo kuitenkin käyttöön yksi tärkeä täydellisyysaksiooman seuraus:

Arkhimedeen ominaisuus:

Olkoon xeR mikä tahansa.
Tällöin on olemassa luonnollinen luku n, jolle pätee

$n > x.$

(Toisin sanoen, joukolla N ei ole ylärajaa)
(Todistus RAJ-kurssilla)

Tiheys

Kun a,beR, a<b, niin väli]a,b[on epätyhjä:
ainakin

$$\frac{a+b}{2} e]a,b[$$

Jos
$a, b \in \mathbb{Q}$
niin tietysti myös

$$\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että itse asiassa jokaisella R:n avoimella välillä on rationaaliluku(ja):

Lause 1.2.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
Tällöin on olemassa $q \in \mathbb{Q}$, jolle pätee $a < q < b$ (ts $q \in]a,b[\cap \mathbb{Q}$)

Todistus

Koska a<b, niin

$b - a > 0,$

joten myös

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}}_{\in \mathbb{R}} > 0$$

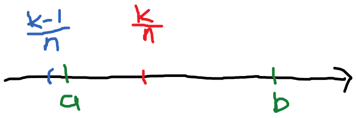
Arkhimedeen ominaisuuden nojalla voidaan valita luonnollinen luku n,
jolle pätee

$$\frac{1}{b-a} < n,$$

jolloin siis

$$\frac{1}{b-a} < n,$$
jolloin siis
$$\boxed{b - a > \frac{1}{n}}$$

Osoitetaan että joku luvun $\frac{1}{n}$ monikerta
$k * \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}, missä\ k \in Z$, on välillä]a,b[:



Valitaan keZ, jolle pätee
$$k - 1 \leq na < k$$
Tällöin
$$\frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n}$$
Toisaalta
$$\frac{k}{n} = \frac{k-1+1}{n} = \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{\leq a} + \frac{1}{n} \leq a + \underbrace{\frac{1}{n}}_{<b-a} < a + b - a = b$$

eli $\frac{k}{n} < b$
Siispä
$$a < \frac{k}{n} < b,$$
joten voidaan valita
$$q = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$$
□

Vastaavasti saadaan:

Lause 1.3.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
Tällöin on olemassa
$$z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$
jolle pätee
$$z \in]a, b[$$

Todistus

harjoitustyö

Rationaali- ja irrationaalilukuja on siis "joka paikassa" lukusuoralla.
(Mutta osoittautuu, että irrationaalilukuja on PALJON "enemmän" kuin rat. lukuja)
Yleisemmin sanotaan, että joukko $A \subset \mathbb{R}$ on tiheä, jos kaikille $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ pätee,
että $]a, b[\cap A \neq \emptyset$ (ts. ei ole tyhjä)

Siis esim. Q ja R\Q ovat tiheitä (L1.2 ja L1.3), mutta esim. Z ei ole tiheä, koska esim.
$$]1, 2[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

1.3. Itseisarvo ja kolmioepäyhtälö

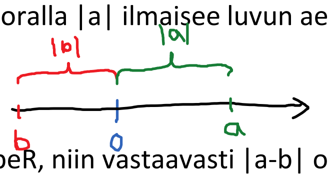
19. syyskuuta 2014 10:16

Määritelmä

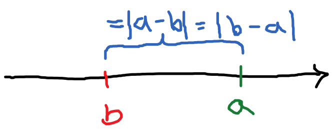
Luvun aeR itseisarvo on

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Lukusuoralla |a| ilmaisee luvun aeR etäisyyden nollasta.



Kun a,beR, niin vastaavasti |a-b| on lukujen
a ja b välinen etäisyys.



Itseisarvon perusominaisuuksia:

Lemma 1.4.

(Lemma on "apulause")

Olkoot a,beR. Tällöin pätee:

a) $|a| \geq 0$

b) |a| = 0 <=> a = 0

c) $|ab| = |a||b|$ (erityisesti $|-a| = |(-1) * a| = |-1||a| = |a|$)
ja

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (kun\ b \neq 0)$$

d) $-|a| \leq a \leq |a|$

Todistus

a) Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a \geq 0$ $\square$
Jos taas
a<0, niin -a > 0
ja nyt siis
$|a| = -a > 0$ $\square$

b) "<="
Jos a = 0, niin erityisesti $a \geq 0$, $\square$
joten $|a| = a = 0$.

"=>"
Jos |a| = 0, niin täytyy olla $a \geq 0$,
jolloin
$a = |a| = 0$ $\square$
(muuten $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$)

c) |ab| = |a||b|

HT

Kun $b \neq 0, niin$

$$1 = |1| = \left|b * \frac{1}{b}\right| = |b| * \left|\frac{1}{b}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|} \; (jaetaan\ |b|: llä)$$

Siispä

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a * \frac{1}{b}\right| = |a| * \left|\frac{1}{b}\right| = |a| * \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

d) Jos $a \geq 0, niin$

$$-|a| \leq 0 \leq a = |a|$$

$$\Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$

Jos taas a<0

$$-|a| = -(-a) = a < 0 \leq |a|$$

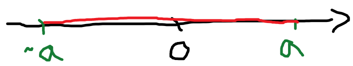
$$\Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$

Seuraava tulos on hyödyllinen itseisarvo-epäyhtälöiden ratkaisuissa:

Lemma 1.5.

Olkoon a > 0. Tällöin kaikille xeR pätee

$$|x| \leq a <=> -a \leq x \leq a$$



Todistus

HT

Huom.

Vastaavasti

$$|x| \geq a <=> x \leq -a \; tai \; x \geq a$$

Esimerkkejä

a) Ratkaise, mille xeR pätee $|2x - 5| < 3$

4 eri tapaa:

1) Koska $|2x - 5| \geq 0 \; ja \; 3 \geq 0, niin$

$|2x - 5| < 3$ <=> $|2x - 5|^2 < 3^2 = 9 \; (L1.1.(g))$

<=> $4x^2 - 20x + 25 < 9$ ...

Onnistuu, mutta turhan hankalaa...

2) Lemma 1.5. avulla

$|2x - 5| < 3$ <=> $-3 < 2x - 5 < 3$

<=> $2 = -3 + 5 < 2x < 3 + 5 = 8$

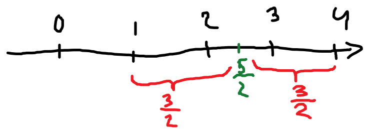
<=> $1 < x < 4$

Siis |2x-5| < 3 täsmälleen silloin, kun $x \in]1,4[$

3) Geometrinen tulkinta:

$$|2x-5| < 3 \iff \underbrace{\left|2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right|}_{=2\left|x-\frac{5}{2}\right|} < 3$$

$$\iff \left|x-\frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2}$$



Tämä tarkoittaa, että lukujen x ja 5/2 etäisyys on alle 3/2, joten x:n täytyy olla välillä

$$\left]\frac{5}{2}-\frac{3}{2},\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right[=]1,4[$$

4) Tutki erikseen tapaukset $2x-5 \geq 0 \; ja \; 2x-5 < 0$ (HT)

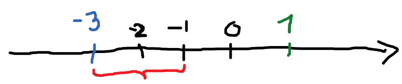
b) Ratkaise

$$|x-1| \geq |x+3|$$

1) Geometrinen tulkinta:

$|x-1|$ on x:n etäisyys luvusta 1 ja
$|x+3|$ on x:n etäisyys luvusta -3.

Epäyhtälö on voimassa, jos x on lähempänä lukua -3 kuin lukua 1.



Täällä $|x+3| \leq |x-1|$

Koska -1 on lukujen -3 ja 1 puolivälissä, niin pitää siis olla

$$x \leq -1$$

2) Joskus toiseen korotus toimii hyvin:

$$|x-1| \geq |x+3| \iff |x-1|^2 \geq |x+3|^2$$

$$\iff (x-1)^2 \geq (x+3)^2$$

$$\iff \cancel{x^2} - 2x + 1 \geq \cancel{x^2} + 6x + 9$$

$$\iff 8x \leq 1 - 9 = -8$$

$$\iff x \leq -1.$$

3) Tutkitaan eri tapauksia ja poistetaan itseisarvot:

- Jos x < -3, niin x - 1 < -3 -1 = -4 -4 < 0
  ja x + 3 < -3 + 3 < 0,
  joten

$$\underbrace{|x-1|}_{<0} \geq \underbrace{|x+3|}_{<0} \iff -(x-1) \leq -(x+3)$$

$$\iff -x+1 \geq -x-3$$

$$\iff 1 \geq -3,$$

ts. epäyhtälö pätee kun x < -3

- Jos

  $-3 \leq x < 1, niin\ x - 1 < 1 - 1 = 0$

  ja $x + 3 \geq 3 + 3 = 0,$

  joten

  $\underbrace{|x-1|}_{<0} \geq \underbrace{|x+3|}_{\geq 0}$

  <=> $-(x-1) \geq x + 3$

  <=> $-x + 1 \geq x + 3$

  <=> $2x \leq 1 - 3 = -2$

  <=> $x \leq -1$

  ts. ey pätee kun

  $-3 \leq x \leq -1$

- Jos $x \geq 1, niin$

  kaksi positiivista, joten

  $|x-1| \geq |x+3|$

  <=> $x - 1 \geq x + 3 <=> \ -1 \geq 3,$

  mikä ei ole totta.

  Siis

  $|x-1| \geq |x+3|$

  pätee, kun

  $x \leq -1$

Esim.

(Arvioita itseisarvoille)

a) Oletetaan, että $a, b \in [0, 2]$

Osoita, että

$|a^2 - b^2| \leq 4|a - b|$

Todistus

$\underbrace{|a^2 - b^2|}_{(a+b)(a-b)} \overset{L14c}{=} \underbrace{|a+b|}_{\geq 0}|a-b| = \underbrace{(a+b)}_{\leq 2+2=4}|a-b|$

(koska $|a-b| \geq 0$)

$\leq 4|a-b|$

b) Oletetaan, että z > 1 ja y > 2

- Osoita, että

  $$\left|\sqrt{z} - \sqrt{y}\right| \leq \frac{|z-y|}{2}$$

  Todistus

  Koska

  $$\sqrt{z} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{z}+\sqrt{y})(\sqrt{z}-\sqrt{y})}{\sqrt{z}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{z}^2 - \sqrt{y}^2}{\sqrt{z}+\sqrt{y}} = \frac{z-y}{\sqrt{z}+\sqrt{y}}$$

  niin

  $$|\sqrt{z} - \sqrt{y}| = \left|\frac{z-y}{\sqrt{z}\ \sqrt{y}}\right| \overset{L14c}{=} \frac{|z-y|}{|\sqrt{z}+\sqrt{y}|}$$

Lisäksi

$$\sqrt{z} + \sqrt{y} > 1 + \sqrt{2} > 1 + 1 = 2$$

joten

$$|\sqrt{z} + \sqrt{y}| = \frac{|z-y|}{\underbrace{|\sqrt{z} + \sqrt{y}|}_{\geq 0}} = \frac{|z-y|}{\sqrt{z} + \sqrt{y}} \leq \frac{|z-y|}{2}$$

1) Huomattiin, että $|\sqrt{z} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{z} - \sqrt{y}} |z-y|$

2) Koska $z > 1$ ja $y > 2$, niin

$$\sqrt{z} + \sqrt{y} > \sqrt{1} + \sqrt{2} > 2, \text{ joten}$$

$$\frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{y}} < \frac{1}{2}$$

3) Siispä $|\sqrt{z} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{y}} |z-y| < \frac{1}{2} |z-y|$
jos

$$|z-y| > 0$$

Jos taas z=y, niin

$$|\sqrt{z} - \sqrt{y}| = 0 = \frac{1}{2} |z-y|$$

Siten aina pätee

$$|\sqrt{z} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2} |z-y|$$

Kolmioepäyhtälö

24. syyskuuta 2014 14:19

Seuraava kolmioepäyhtälö on eräs analyysin keskeisistä työkaluista:

Lause 1.6. (Δ-ey)

Olkoot a,b∈R.
Tällöin
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Todistus

Lemma 1.4.(d) nojalla
$$-|a| \leq a \leq |a|$$
ja
$$-|b| \leq b \leq |b|$$
joten
$$\underbrace{-|a|-|b|}_{=-(|a|+|b|)} \leq a+b \leq |a|+|b| \text{ (L.1.1. (b))}$$
Tällöin Lemma 1.5:n nojalla
$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Muista:
$$-c \leq a+b \leq c$$
niin
$$|a+b| \leq c \; (L1.5)$$
Nyt
$$c = |a|+|b|$$

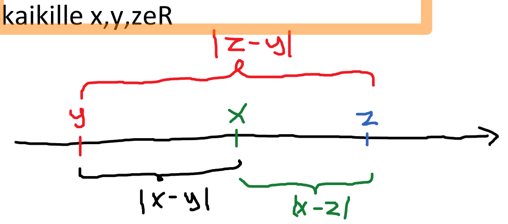
Vaihtoehtoinen todistusidea

Koska
$$|a+b| \geq 0 \; ja \; |a|+|b| \geq 0$$
niin tällöin
$$|a+b| \leq |a|+|b| <=> |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$
L11 g

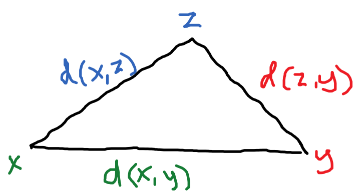
Ohjauksissa 3 osoitetaan, että todella pätee
$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$
kaikille a,b∈R, mistä seuraa kolmioepäyhtälö.

Huom.

Kolmioepäyhtälöstä seuraa, että
$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$
kaikille x,y,z∈R



Sama pätee paljon yleisemmillekin etäisyyksille (merkitään
$$d(x,y) = x{:}n \; ja \; y{:}n \; etäisyys)$$



Yleinen kolmioepäyhtälö sanoo, että

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

Pätee myös niin sanottu käänteinen kolmioepäyhtälö:

Lause 1.7 (käänt Δ-ey)

> Olkoot a,beR.
> Tällöin
> $$\big||a| - |b|\big| \le |a+b|.$$

Todistus

Kolmioepäyhtälön perusteella

$$|a| = |a + \underbrace{b + (-b)}_{0}| \le |a+b| + \underbrace{|-b|}_{|b|} = |a+b| + |b|,$$

joten

$$|a| - |b| \le |a+b|.$$

Vastaavasti saadaan

$$|b| - |a| \le |a+b| \underset{\text{Kerrotaan -1:llä}}{<=>} -|a+b| \le -(|b| - |a|) = |a| - |b|.$$

Erityisesti siis

$$-|a+b| \le |a| - |b| \le |a+b|$$

jolloin Lemma 1.5:n nojalla

$$\big||a| - |b|\big| \le |a+b|$$

$$(-c \le |a| - |b| \le c, missä\ c = |a+b|)$$

Huom.

> Kaikille a,beR pätee siis
> $$\big||a| - |b|\big| \le |a+b| \le |a| + |b|.$$
>
> Tästä saadaan helposti (HT), että kaikille a,beR pätee myös
> $$\big||a| - |b|\big| \le |a-b| \le |a| + |b|,$$

mutta näitä merkkejä ei voi vaihtaa!

Esimerkkejä (kolmiepäyhtälön käytöstä)

a) Oletetaan, että a,beR siten, että

$$4 < |a| < 5\ ja\ |b| < 1.$$

Arvioi lukua a+b:

1) $|a+b| \le |a| + |b| < 5 + 1 = 6$

2) $|a+b| \ge \big||a| - |b|\big| \underset{*}{\ge} |a| - |b| > 4 \underbrace{- |b|}_{-1,\ \text{koska}\ |b|<1} > 4 - 1 = 3$

(Kohdassa * käytettiin arviota

$$|x| \ge x\ kaikille\ xeR)$$

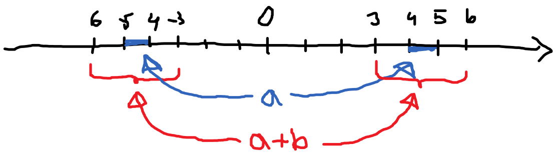
Siispä

$$3 < |a+b| < 6$$

eli

$$-6 < a+b < -3\ tai\ 3 < a+b < 6.$$

Geometrinen tulkinta



b) Oletetaan, että a,beR,

$$|a| \leq 3 \; ja \; |a - 2b| \leq 1.$$

Osoita, että tällöin

$$|b| \leq 2.$$

Arvioidaan aluksi lukua 2b:

$$|2b| = |-2b| = |a - 2b + (-a)| \underset{\Delta ey}{\leq} \underbrace{|a - 2b|}_{\leq 1} + \underbrace{|-a|}_{=|a| \leq 3} \leq 1 + 3 = 4$$

joten

$$|2b| \leq 4$$

mistä saadaan

$$2|b| \leq 4$$

joten todella

$$|b| \leq 2.$$

Ok.

c) Olkoot x,yeR, joille

$$|x - 4| < \frac{1}{1000}$$

ja

$$|y + 2| < \frac{1}{1000}$$

Arvioi lukuja x+y ja x*y.

Idea:

Koska x on lähellä lukua 4 ja
y on lähellä lukua -2,
niin varmaankin x+y on lähellä lukua -2+4 = 2
ja x*y on lähellä lukua -2*4 = -8

Tutkitaan asiaa!

$$|(x + y) - \underbrace{2}_{4-2}| = |x + y - 4 + 2| = |(x - 4) + (y + 2)|$$

$$\underset{\Delta ey}{\leq} |x - 4| + |y + 2| < \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{1}{500}$$

Vastaavasti

$$|x * y - (-8)| = |xy - (4 * (-2))| = |xy \underbrace{- 4y + 4y}_{0} - 4 * (-2)|$$

$$= |(x - 4) * y + 4(y - (-2))|$$

$$\underset{\Delta ey}{\leq} |(x - 4)y| + |4(y + 2)| \underset{L1\,4c}{=} |x - 4||y| + 4|y + 2|$$

Arvioidaan vielä lukua |y|

$$|y| = |y + 2 - 2| \underset{\Delta ey}{\leq} \underbrace{|y + 2|}_{< \frac{1}{1000}} + \underbrace{|-2|}_{2}$$

$$< \frac{1}{1000} + 2 < 3.$$

Siispä

$$|xy-(-8)| \leq \underbrace{|x-4|}_{<\frac{1}{1000}}\underbrace{|y|}_{<3} + 4\underbrace{|y+2|}_{<\frac{1}{1000}} < \frac{3}{1000} + \frac{4}{1000} < \frac{1}{100}$$

Siispä

$$|(x+y)-2| < \frac{1}{500}$$

ja

$$|xy+8| < \frac{1}{100}$$

d) Osoita, että

$$\left|\frac{x-5}{3x^2+16}\right| < \frac{1}{|x|}, kun\ |x| > 10$$

Ratkaisu:

Koska $\overbrace{3x^2}^{\geq 0} + 16 \geq 16 > 0, niin$

$$|3x^2+16| = 3x^2+16 > 3x^2$$

joten

$$\left|\frac{x-5}{3x^2+16}\right| \overset{L14c}{=} \frac{|x-5|}{|3x^2+16|} = \underbrace{\frac{1}{3x^2+16}}_{<\frac{1}{3x^2}} * |x-5| \leq \frac{1}{3x^2} * \underbrace{|x-5|}_{\substack{\Delta ey \\ \leq |x| + |-5|}}$$

Huom.

$$\frac{1}{3x^2} > 0$$

$$\leq \frac{1}{3x^2} * (|x| + \underbrace{5}_{<10<|x|}) \leq \frac{1}{3x^2} (\underbrace{|x| + |x|}_{2|x|}) = \frac{2|x|}{3|x|^2}$$

$$= \frac{2}{3} * \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x|}$$

Siispä todella

$$\left|\frac{x-5}{3x^2+16}\right| < \frac{1}{|x|} kun\ |x| > 0$$

Summamerkintöjä:

Kun a1,a2, ..., an eR (eli $a_k \in \mathbb{R}$, kun $k = 1, 2, \ldots, n$)

niin merkitään $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

(Σ on iso sigma, pikku-sigma on σ)

Vastaavasti $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 * a_2 * \ldots * a_n$

(Π on iso pii, pikku-pii on π)

Siis esimerkiksi $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$

ja

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2$$

ja

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

Esimerkkejä

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} =$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \quad + a}_{n \text{ kpl}} = na$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) = 1 + 2 + 3 + \quad + n$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$ kun $\lambda \in \mathbb{R}$

distributiivisuus

Kolmioepäyhtälöstä saadaan seuraava yleistys:

Seuraus 1.8

Olkoot $a_1, a_2, \quad , a_n \in \mathbb{R}$

Tällöin

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \quad + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \quad + |a_n|$$

eli

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Todistus

Todistetaan väite induktiolla lukujen a_k määrän n suhteen.

1) Perusaskel: todistetaan väite kun n=1:

Tällöin väite on siis

$$\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{1} a_k\right|}_{=a_1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{1} |a_k|}_{=|a_1|}$$

eli

$$|a_1| \leq |a_1|$$

mikä on tietysti totta, ok.

2) Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee kun n = m
ja todistetaan, että tällöin väite pätee myös kun

n = m + 1

Oletetaan siis, että

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k|$$

Tällöin

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right| = \left|\underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_k}_{x} + \underbrace{a_{m+1}}_{y}\right|$$

$$\overset{\Delta\text{ey}}{\leq} \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}_{|x|} + \underbrace{|a_{m+1}|}_{|y|}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| + |a_{m+1}| = \sum_{k=1}^{m+1} |a_k|$$

eli

$$\left|\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m+1} |a_k|$$

joten väite pätee myös kun

$n = m + 1$

Induktioperiaatteen nojalla väite on siis totta kaikille $n \in \mathbb{N}$

$\square$

1.4. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

25. syyskuuta 2014 11:28

Lause 1.9. (A-G-ey)

Olkoot

$$a, b \geq 0.$$

Tällöin

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b).$$

Todistus

Tehdään malliksi kaksi todistusta:

A

Muokataan väitettä ekvivalenttiin muotoon:

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$\iff 2\sqrt{ab} \leq a+b$$

$$\iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\overset{*}{\iff} \underbrace{\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2}_{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \geq 0$$

$$\iff \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Koska jokaisen reaaliluvun neliö on ≥ 0 (L.1.1. e ja $0^2 = 0$), on viimeinen väite aina tosi, joten myös alkuperäinen väite on tosi (koska ne ovat ekvivalentit). Ok.

Huomaa, että kohdassa $*$ tarvitaan tietoa $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$.
Tämä on totta, sillä

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab = (\sqrt{a})^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a} * \sqrt{a} * \sqrt{b} * \sqrt{b} = \left(\sqrt{a} * \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} * \sqrt{b}\right)$$
$$= \left(\sqrt{a} * \sqrt{b}\right)^2$$

eli

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a} * \sqrt{b}\right)^2, ja\ koska\ \sqrt{ab} \geq 0, ja\ \sqrt{a} * \sqrt{b} \geq 0$$

niin täytyy olla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$$

B

Sama lyhyemmin (kun tiedetään mitä pitää tehdä):
Koska

$$\underset{\text{L1.1e}}{0 \leq} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$= a - 2\sqrt{ab} + b$$

niin

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

joten

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

Seuraus 1.10

Olkoot

$$a, b \geq 0$$

Tällöin

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

"harmoninen keskiarvo <= geometrinen keskiarvo <= aritmeettinen keskiarvo"

Todistus

(Oikean puolen ey on L.1.9)

Vasen puoli:

merkitään

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$$

Tällöin

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}(x+y) \underset{\text{A g-ey}}{\geq} \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

joten ottamalla käänteisluvut saadaan

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt{ab}$$

$\square$

Esim.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3} \overset{AG}{\leq} \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$$

ja

$$\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3} \underset{HG}{\geq} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

joten

$$2{,}4 \leq \sqrt{6} \leq 2{,}5$$

26. syyskuuta 2014 10:17

Maksimi ja minimi

Kun a,b $\in \mathbb{R}$, niin merkitään

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \geq b \\ b, & \text{jos } b \geq a \end{cases}$$

ja

$$\min(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \leq b \\ b, & \text{jos } b \leq a \end{cases}$$

Lemma 1.11

Kun a,b $\in \mathbb{R}$, niin

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a+b|)$$

ja

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

Todistus

HT

Esim.

Kun a,b$\in R, niin$

$$\min(a,b) \leq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a,b)$$

Totea!

(Ohjaus 1 / Totea!)

Yleisemmin, jos $a_1, a_2, \quad , a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\max(a_1, a_2, \quad , a_n)$$

on suurin näistä luvuista, ja

$$\min(a_1, a_2, \quad , a_n)$$

on pienin näistä luvuista.

Huom.

Äärellisestä määrästä lukuja voidaan aina valita suurin ja pienin (eli max ja min), mutta jos lukuja on ääretön määrä, niin tämä ei aina onnistu!

Esimerkiksi joukon

$$\left\{\frac{1}{k} : k = 1,2,\ldots,n\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$$

maksimi on

1

ja minimi on

$$\frac{1}{n},$$

mutta joukolla

$$\left\{ \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \quad \right\}$$

ei ole olemassa minimiä! (Maksimi on edelleen 1.)

2. Alkeisfunktioita

26. syyskuuta 2014 10:36

Määritelmä

(funktio, osa 1)

Funktio

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

on sääntö, joka liittää jokaiseen reaalilukuun $x \in \mathbb{R}$ tasan yhden reaaliluvun, jota merkitään

$$f(x).$$

Yleisemmin, jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$, niin funktio

$$f: A \to B$$

liittää jokaiseen lukuun $x \in A$ tasan yhden luvun joukosta B, toisin sanoen

$$f(x) \in B$$

kaikille

$$x \in A$$

Tässä A on funktion f lähtöjoukko ja B on funktion maalijoukko.

2.1 Polynomit

Määritelmä

Funktio

$$p: R \to R$$

on polynomi, jos se voidaan esittää muodossa

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

missä

$n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$ kaikille $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $a_n \neq 0$

Luvut

$$a_j$$

ovat p:n kertoimet, ja

$$n \in \mathbb{N}$$

on polynomin p aste.

Esim.

$$p(x) = \frac{13}{5}$$

on nollannen asteen polynomi (eli vakiofunktio)

$$p(x) = x - x^2$$

on toisen asteen polynomi

$$p(x) = 3x^5 - \sqrt{8}x^3 + \frac{3\pi}{a}x - 71$$

on viidennen asteen polynomi

Jokainen polynomi p voidaan jakaa tekijöihin nollakohtiensa (eli niiden $x \in \mathbb{R}$ joille $p(x) = 0$) avulla. Tämän todistamiseksi tarvitaan yksi aputulos:

Lemma 2.1

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$

Tällöin

$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}\right)$$

$$\left(= (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2 y^{n-3} + x y^{n-2} + y^{n-1}\right) \right)$$

Todistus

Tarkka induktiotodistus on HT (harj. 3)

Tässä kuitenkin idea, miksi väite on totta:

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$$

$$= x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} - x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - x^{n-3}y^3 - \dots - xy^{n-1} - y^n$$

(kerrottu x:llä) (kerrottu -y:llä)

$$= x^n - y^n$$

Lause 2.2

Olkoon $p: R \to R$ asteen $n \in \mathbb{N}$ polynomi.
Jos $x_1 \in \mathbb{R}$ on polynomin p nollakohta,
$(p(x_1) = 0)$
niin p on jaollinen 1. asteen polynomilla
$x - x_1$
toisin sanoen, on olemassa asteen n-1 polynomi
$q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
siten, että
$p(x) = (x - x_1)\, q(x)$
kaikille
$x \in \mathbb{R}$

Todistus

Koska p on asteen n polynomi, se on muotoa

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

missä

$$a_n \neq 0$$

Koska

$$p(x_1) = 0,$$

niin Lemman 2.1 avulla voidaan kirjoittaa

$$p(x) = p(x) \underbrace{- p(x_1)}_{0}$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$- a_n x_1^n - a_{n-1}x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 - a_0$$

$$= a_n (x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_{n-2}(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \dots$$
$$+ a_2 (x^2 - x_1^2) + a_1 (x - x_1)$$

Käytetään Lemma 2.1:sta jokaiseen termiin

$$= a_n (x - x_1)\left(\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} x_1^{k-1}\right)$$
$$+ a_{n-1}(x - x_1)\left(\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-1-k} x_1^{k-1}\right)$$
$$+ \dots + a_2 (x - x_1)(x + x_1) + a_1 (x - x_1)$$

(x - x1) yhteiseksi tekijäksi

$$= (x - x_1)\Big[a_n (x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + x^{n-3}x_1^2 + \dots + x x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$
$$+ a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}x_1 + \dots + x x_1^{n-3} + x_1^{n-2})$$
$$+ \dots +$$
$$+ a_2 (x + x_1)$$

$$+ \dots +$$

$$+ a_2 (x + x_1)$$

$$+ a_1 \Big]$$

$$= (x - x_1)\left(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0\right)$$

missä

$$b_{n-1} = a_n \neq 0$$

$$b_{n-2} = a_n x_1 + a_{n-1}$$

$$b_{n-3} = a_n x_1^2 + a_{n-1} x_1 + a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = a_n x_1^{n-2} + a_{n-1} x_1^{n-3} + \dots + a_3 x_1 + a_2$$

$$b_0 = a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \dots + a_3 x_1^2 + a_2 x_1 + a_1$$

joten todella

$$p(x) = (x - x_1)\, q(x)$$

kaikille

$$x \in \mathbb{R}$$

missä

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

on todella asteen n-1 polynomi, koska

$$b_{n-1} = a_n \neq 0$$

$$\square$$

Lause 2.2

Olkoon

$$x_1 \in \mathbb{R}$$

polynomin

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

nollakohta, ts.

$$p(x_1) = 0.$$

Tällöin p voidaan esittää muodossa

$$p(x) = (x - x_1) q(x)$$

missä q on asteen n-1 polynomi.

Toistamalla lauseen 2.2 päättelyä saadaan seuraavat tulokset:

Seuraus 2.3

Jos n. asteen polynomilla p on nollakohdat

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

niin tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Todistus

Lauseen 2.2. nojalla

$$p(x) = (x - x_1) q_1(x),$$

missä q_1 astetta n-1.

Koska

$$p(x_2) = 0,$$

niin täytyy olla myös

$$q_1(x_2) = 0,$$

jolloin

$$q_1(x) = (x - x_2) q_2(x),$$

missä q_2 astetta n-2.

Lisäksi

$$q_1{:}n, q_2{:}n \; jne \ldots$$

korkeimman asteluvun kerroin on aina a_n,
joten n. askeleen jälkeen saadaan

$$q_n = a_n.$$

Ok.

Seuraus 2.4.

Asteen n. polynomilla

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

on korkeintaan n nollakohtaa ($n \in \mathbb{N}$).

Todistus

Jos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$
ovat p:n nollakohdat, niin
$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \; *$$

Koska p astetta n, niin
$$a_n \neq 0$$

Jos nyt
$$p(x_{n+1}) = 0$$
jollekin
$$x_{n+1} \in \mathbb{R},$$
niin täytyy olla
$$x_{n+1} - x_k = 0 \; jollekin \; k = 1,2, \ldots, n,$$
sillä muuten tulo * ei voi olla nolla kun
$$x = x_{n+1}.$$
Siispä
$$x_{n+1} = x_k$$
jollekin
$$k = 1,2, \ldots, n$$
eli nollakohtia on korkeintaan n kappaletta.
Ok.

Huom.

Jos
$$p(x) = (x - x_1)^k q(x)$$
kaikilla $x \in \mathbb{R}$,
missä $k \in \mathbb{N}$ ja q on polynomi, jolle
$$q(x_1) \neq 0,$$
niin sanotaan, että x_1 on p:n
k-kertainen nollakohta.

Esim.

a)
Polynomilla
$$p(x) = x^2 + 1$$
ei ole reaalisia nollakohtia, sillä
$$p(x) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + 1 \geq 1$$
kaikilla $x \in \mathbb{R}$, erityisesti
$$p(x) \neq 0$$
kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

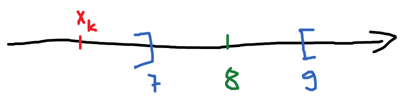
b)
Polynomilla
$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
on 1-kertainen nollakohta
$$x = 0$$
ja 2-kertainen nollakohta
$$x = 3,$$
sillä
$$p(x) = x\underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{=(x-3)^2} = x(x - 3)^2.$$

Muista:
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

c)
Oletetaan, että 3. asteen polynomilla

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
on nollakohdat
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$
ja että
$$p(8) = \frac{1}{2}.$$
Osoita, että tällöin joku p:n nollakohdista on välillä
$$]7, 9[.$$

`Ratkaisu:`



Väitetään siis, että jollekin luvuista $x_k, k = 1,2,3$ pätee, että
$$x_k \in]7, 9[,$$
eli yhtäpitävästi
$$|x_k - 8| < 1.$$

Tehdään antiteesi, että näin ei olekaan, jolloin siis kaikille
$$k = 1,2,3 \text{ pätee } |x_k - 8| \geq 1.$$

Seurauksen 2.3. nojalla p voidaan kirjoittaa muotoon
$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$
jolloin oletuksen $p(8) = \frac{1}{2}$ nojalla
$$\frac{1}{2} = p(8) \underset{\text{koska} >0}{=} |\,p(8)\,| = |(8 - x_1)(8 - x_2)(8 - x_3)|$$

$$\overset{\text{L14c}}{=} |8 - x_1||8 - x_2||8 - x_3| = \underbrace{|x_1 - 8|}_{\geq 1}\underbrace{|x_2 - 8|}_{\geq 1}\underbrace{|x_3 - 8|}_{\geq 1} \geq 1$$

mistä saadaan ristiriita
$$\frac{1}{2} \geq 1 \quad \lightning$$

Siispä joku nollakohdista on välillä
$$]7\,, 9[.$$
Ok.

Toisen asteen polynomin nollakohdat ja toisen asteen epäyhtälöt voidaan ratkaista neliöksi täydentämisen avulla eli kaavaa
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
käyttämällä. (myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaava todistetaan näin!)

Esimerkki 2.5.

Ratkaise p:n nollakohdat ja esitä p nollakohtiensa avulla, kun

a)
$$p(x) = x^2 - 6x + 5$$

Täydennetään p ensin neliöksi:
$$p(x) = x^2 - 6x + 5 = \underbrace{x^2 + 2 * (-3) * x + 9}_{(x-3)^2} \underbrace{- 9 + 5}_{-4}$$

lisätään ja vähennetään
$9 = (-3)^2$

$$= (x-3)^2 - 4$$

Siispä

$$p(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = \pm 2 \ (ts. \, |x-3| = 2)$$
$$\Leftrightarrow x = 5 \ tai \ x = 1.$$

Siis p:n nollakohdat ovat x=5 ja x=1, joten

$$p(x) = (x-5)(x-1).$$

b)

$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4.$

Kokeilemalla huomataan, että

$$p(1) = 2 * 1^3 - 9 * 1^2 + 3 * 1 + 4 = 0,$$

joten L.2.2. nojalla p on jaollinen $(x-1)$: $llä$.

Tehdään jakolasku jakokulman avulla:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 7x - 4 \\
\hline
x-1 & 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4 \\
 & \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 & 0 - 7x^2 + 3x \\
 & \underline{+7x^2 - 7x} \\
 & 4x + 4 \\
 & \underline{+4x - 4} \\
 & 0
\end{array}$$

Siis

$$p(x) = (x-1)(2x^2 - 7x - 4)$$

$$= 2(x-1)\underbrace{\left(x^2 - \frac{7}{2}x - 2\right)}_{= q(x)}$$

Täydennetään q neliöksi

$$q(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - 2$$

$$= \underbrace{x^2 + 2 * \left(-\frac{7}{4}\right)x + \left(\frac{7}{4}\right)^2}_{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2} \underbrace{- \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2}_{-\frac{49}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{81}{16} = -\left(\frac{9}{4}\right)^2}$$

$$= \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2.$$

Nyt

$$q(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{7}{4} = \pm \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 4 \ TAI \ x = \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Siispä p:n nollakohdat ovat x=1, x=4 ja $x = -\frac{1}{2}$,
ja siten

$$p(x) = 2(x-1)(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Esim.

Ratkaise, mille $x \in \mathbb{R}$ $pätee$ $x^2 - 2x < 3$

Ratkaisu:

$x^2 - 2x < 3$

<=> $x^2 - 2x - 3 < 0$

<=> $\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} \underbrace{-1-3}_{-4} < 0$

<=> $(x-1)^2 < 4$

<=> $|x-1|^2 < 4$ | $a^2 = |a|^2$ $\forall a \in \mathbb{R}$

<=> $|x-1| < 2$
(koska $|x-1| > 0$ ja $2 > 0$)

<=> $-2 < x - 1 < 2$

<=> $-1 < x < 3.$

Siispä epäyhtälö pätee kun
$x \in]-1, 3[.$

Lause 2.6.

Olkoon

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

a)

$$p(x) = 0$$

$$<=> x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b)

Jos x_1 *ja* x_2 ovat p:n nollakohdat, niin

$$b = -a(x_1 + x_2)$$

ja

$$c = ax_1x_2.$$

Todistus

a)

HT

b)

Koska

$$p(x_1) = 0 = p(x_2),$$

niin seurauksen 2.4. nojalla

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= a(x^2 \overbrace{- x * x_2 - x_1 * x}^{-(x_1+x_2)x} + x_1x_2)$$

(kerrotaan auki)

$$= ax^2 \underbrace{- a(x_1 + x_2)}x + \underbrace{ax_1x_2}.$$

Toisaalta

$$p(x) = ax^2 \underbrace{+ bx} + \underbrace{c},$$

joten

$$b = -a(x_1 + x_2) \; ja \; c = ax_1x_2.$$

Ok.

Huom.

a) Myös 3. ja 4. asteen polynomien nollakohdille on olemassa ratkaisukaavat, mutta nämä ovat melko monimutkaiset.
Korkeamman asteen ($n \geq 5$) polynomeille tällaisia kaavoja ei ole ollenkaan.

b) Lauseen 2.6. (b)-kohdan tulos yleistyy myös korkeampiin kertalukuihin (3. asteelle HT, Harj. 4)

Määritelmä

Olkoot

$$A, B \subset \mathbb{R}.$$

Funktion

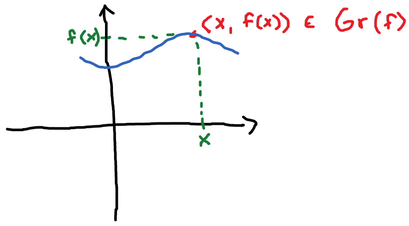
$$f: A \to B$$

kuvaaja eli graafi on joukko

$$Gr(f) = \{(x, f(x)): x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

(muista:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R} = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\})$$



Esim.

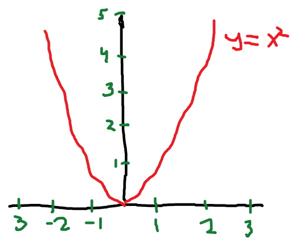
a)

Olkoon

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p(x) = x^2.$$

Koska

$$p(0) = 0, \qquad p(1) = p(-1) = 1,$$
$$p(2) = p(-2) = 4$$
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \qquad jne \dots$$



Saadaan hahmoteltua p:n kuvaaja, joka on ns. perusparaabeli ($y = f(x) = x^2$).

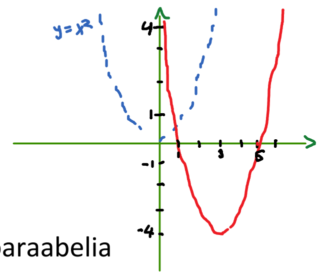
Muiden 2. asteen polynomien kuvaajat saadaan muokkaamalla perusparaabelia:

b)

Olkoon

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$p(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$= (x-3)^2 - 4$$

(Esim. 2.5)



Gr(p) saadaan siis siirtämällä perusparaabelia

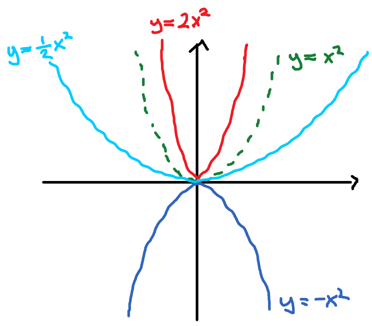
- 3 yksikköä oikealle
- 4 yksikköä alaspäin

c)

Polynomin

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

kerroin a kertoo paraabelin Gr(p) "suunnan" (jos a<0, niin Gr(p) aukeaa alaspäin) ja leveyden.



Huom.

Yleisesti, jos

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

on funktio, niin funktion

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = f(x-a) + b$$

kuvaaja saadaan siirtämällä f:n kuvaajaa

a:n verran x-akselin suuntaan $\left(\xrightarrow{a>0}, \xleftarrow{a<0}\right)$

b:n verran y-akselin suuntaan $(b>0 \uparrow, \ b<0 \downarrow)$

Vielä pari esimerkkiä polynomien arvioinnista:

Esim.

a) Olkoon

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

Etsi sellainen

$$\delta > 0,$$

että

$$|f(x) - f(2)| < \frac{1}{100} \ aina, kun \ |x - 2| < \delta.$$

Ratkaisu:
Arvioidaan:

$$|f(x) - \underbrace{f(2)}_{-3}| = |x^2 - 6x + 5 + 3| = |\underbrace{x^2 - 6x + 8}_{(x-2)(x-4)}|$$

$$= \underbrace{|x - 2|}_{1}\,|x - 4| \qquad = |x - 2 - 2| \leq \underbrace{|x - 2|}_{<1,\ \text{jos}\ |x-2|<\delta<1} + |2| < 3$$

(tämä saadaan niin pieneksi kuin halutaan δ:n avulla)

Siispä jos

$$|x - 2| < \delta < 1$$

niin

$$|f(x) - f(2)| = |x - 2|\underbrace{|x - 4|}_{<3} \leq 3 * |x - 2| \underset{\text{jos } |x-2| < \frac{1}{300}}{<} 3 * \frac{1}{300} = \frac{1}{100}$$

Voidaan siis valita

$$\delta = \frac{1}{300} (< 1),$$

ja tällöin

$$|f(x) - f(2)| < \frac{1}{100}$$

aina kun

$$|x - 2| < \frac{1}{300} = \delta.$$

b)

Olkoon

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0.$$

Etsi sellainen M > 0, että

$$|p(x)| \geq 100$$

aina, kun

$$|x| \geq M.$$

Ratkaisu:
Arvioidaan p:n itseisarvoa:

$$|p(x)| = \left|x^3\left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right)\right| = |x^3|\left|a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right|$$

$$\underset{\Delta\text{-ey}}{\geq} |x|^3 \left||a_3| - \underbrace{\left|\frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x3}\right|}_{\text{Halutaan pienemmäksi kuin } \frac{|a_3|}{2}\ (*)}\right|$$

Merkitään

$$A = \max(|a_2|, |a_1|, |a_0|)$$

ja oletetaan, että

$$|x| \geq 1.$$

Tällöin

$$|x| \leq |x|^2 \leq |x|^3 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|x|^2} \geq \frac{1}{|x|^3}$$

joten termille $*$ saadaan

$$\left|\frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right| \underset{\Delta\text{-ey}}{\leq} \left|\frac{a_2}{x}\right| + \left|\frac{a_1}{x^2}\right| + \left|\frac{a_0}{x^3}\right|$$

$$= \underbrace{\frac{|a_2|}{x}}_{\leq \frac{A}{|x|}} + \underbrace{\frac{|a_1|}{x^2}}_{\leq \frac{A}{|x|}} + \underbrace{\frac{|a_0|}{x^3}}_{\leq \frac{A}{|x|}} \leq \frac{3A}{|x|}$$

Halutaan

$$* \leq \frac{|a_3|}{2}$$

mihin riittää, että

$$\frac{3A}{|x|} \leq \frac{|a_3|}{2}$$

$$\iff |x| \geq \frac{6A}{|a_3|}$$

Jos siis

$$|x| \geq 1 \; ja \; |x| \geq \frac{6A}{|a_3|},$$

niin

$$|p(x)| \geq |x|^3 \underbrace{\left| |a_3| - \underbrace{\left|\frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right|}_{\leq \frac{|a_3|}{2}} \right|}_{\geq \frac{|a_3|}{2} > 0} \geq \underbrace{|x|^3}_{\geq |x|} * \frac{|a_3|}{2} \geq |x| \frac{|a_3|}{2}$$

Haluttiin, että

$$|p(x)| \geq 100$$

mihin siis riittää, että

$$|x| * \frac{|a_3|}{2} \geq 100$$

$$\iff |x| \geq \frac{200}{|a_3|}$$

Voidaan siis valita

$$M = \max\left(1, \frac{6A}{|a_3|}, \frac{200}{|a_3|}\right)$$

ja tällöin

$$|p(x)| \geq 100$$

aina kun

$$|x| \geq M\,.$$

Ok!

2.2. Rationaalifunktiot

Määritelmä

Funktio f on rationaalifunktio, jos on olemassa polynomit

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ja$$
$$q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

siten, että

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

kaikilla

$$x \in \mathbb{R}, \qquad joille\ q(x) \neq 0.$$

(f(x) ei ole määritelty jos q(x) = 0)

Huom.

$f(x) = 0$

<=> $p(x) = 0\ ja\ q(x) = 0.$

$f(x) = " \pm \infty "$

jos

$$p(x) \neq 0\ \ ja\ \ q(x) = 0.$$

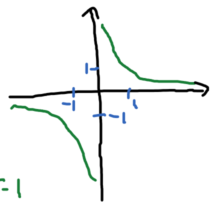
Esim.

a)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

on rationaalifunktio, määrittelyjoukko on

$$\mathbb{R} \backslash \{0\}$$

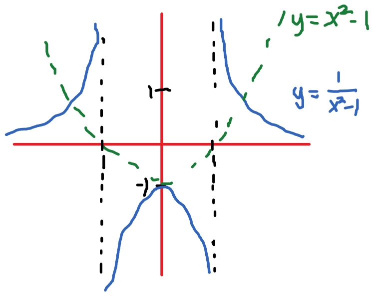


b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

määritelty, kun

$$x \neq \pm 1$$



Määritelmä

Olkoon

$$A \subset \mathbb{R}$$

ja olkoot

$$f, g: A \to \mathbb{R} \text{ funktioita.}$$

Näiden funktioiden summa, tulo ja osamäärä ovat funktiot

$$f + g: A \to \mathbb{R}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$fg: A \to \mathbb{R}, \qquad (fg)(x) = f(x) * g(x)$$

$$\frac{f}{g}: A \setminus \{x \in A: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esim.

Olkoot

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - 1$$

ja

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x + 2.$$

Tällöin

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 1 + x + 2 = x^2 + x + 1$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

Huom.

Yleisesti, jos $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on asteen n polynomi ja $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on asteen m polynomi, missä $m, n \in \mathbb{N}$, niin

- $p + q$ on korkeintaan asteen $\max(n, m)$ polynomi
- pq on asteen $n + m$ polynomi
- $\frac{p}{q}$ on rationaalifunktio

(huomaa, että polynomit ovat myös rationaalifunktioita)

Määritelmä

Olkoot

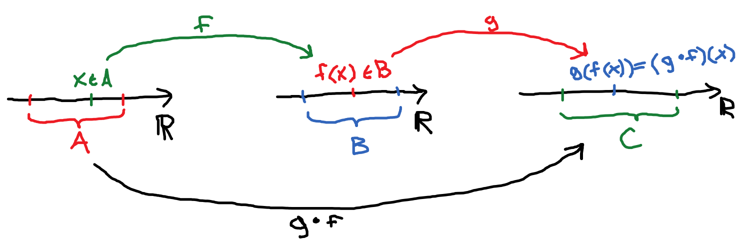
$$A, B, C \subset \mathbb{R}$$

ja olkoot

$$f: A \to B \text{ ja } g: B \to C \text{ funktioita.}$$

Funktioiden f ja g yhdistetty funktio on

$$g \circ f: A \to C, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



(\circ = ∘)

Esim.

Olkoot

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x + 1$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2.$$

Tällöin

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

ja

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1,$$

joten erityisesti

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Voidaan määritellä myös funktiot

$$f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1 = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$$

$$f \circ f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \; o \; f \; o \; f)(x) = f(\underbrace{f \circ f)(x)}_{4x+3}) = 2(4x+3) + 1 = 8x + 7$$

jne…

Usein merkitään

$$f^n = \underbrace{f \circ f \; \circ \cdots \circ f}_{n \text{ kpl}},$$

mutta tässä pitää varoa, ettei sekoita tätä funktion f potensseihin.
(Potenssia voi merkitä $\big(f(x)\big)^n$)

b)

Olkoon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - 2$$

ja

$$g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Tällöin ei voida määritellä yhdistettyjä funktioita $g \; o \; f$, sillä f saa arvoja, jotka eivät kuulu g:n lähtöjoukkoon $[0, \infty[$.

esim. $f(1) = -1 \notin [0, \infty[$.
Sitä vastoin $f \; o \; g$ voidaan määritellä ja saadaan

$$f \circ g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 1 - 2\sqrt{x}.$$

2.3. Monotonisuus, potenssi- ja juurifunktiot

Määritelmä

Olkoon

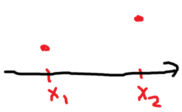
$$A \subset \mathbb{R}.$$

Funktio

$$f\colon A \to \mathbb{R} \; on$$

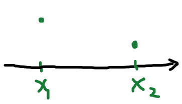
a) kasvava, jos

$f(x_1) \leq f(x_2)$ aina, kun
$x_1 < x_2, \qquad x_1, x_2 \in A$



b) vähenevä, jos

$f(x_1) \geq f(x_2)$ aina, kun
$x_1 < x_2 \;\; ja \;\; x_1, x_2 \in A.$



Funktio f on aidosti kasvava tai vähenevä, jos edellä pätee aito epäyhtälö
(eli esim. $f(x_1) < f(x_2)$ aina, kun $x_1 < x_2$).

Sanotaan myös, että f on (aidosti) monotoninen, jos f on (aidosti) kasvava tai vähenevä.

Esim.

a)

Osoita, että funktio

$$f: [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + x$$

on aidosti kasvava.

Ratkaisu:

Pitää siis osoittaa, että jos $0 \leq x_1 < x_2$, niin

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Olkoot siis $0 \leq x_1 < x_2$.

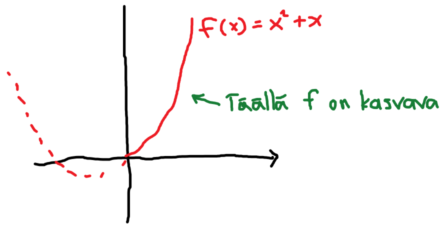
Tällöin

$$x_1^2 < x_2^2 \ \ (L1.1.g),$$

joten

$$f(x_1) = \underbrace{x_1^2}_{<x_2^2} + \underbrace{x_1}_{<x_2} < x_2^2 + x_2 = f(x_2) \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ok!

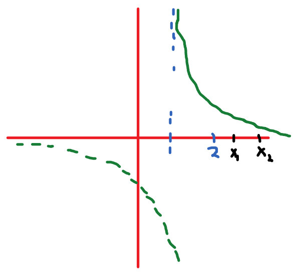


b)

Osoita, että funktio

$$f:]1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$

on aidosti vähenevä.



Ratkaisu:

Olkoot $1 < x_1 < x_2$,

pitää osoittaa, että

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Koska $1 < x_1 < x_2$, niin

$$0 < x_1 - 1 < x_2 - 1,$$

joten

$$\frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \qquad (L.1.1.h)$$

Siispä

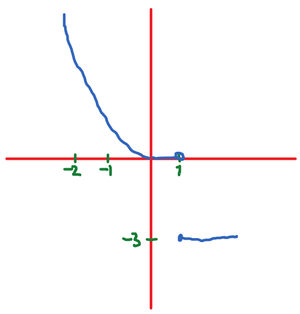
$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ok!

c)

Funktio

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x = 0 \\ 0, & \text{jos } 0 < x < 1 \\ -3, & \text{jos } 1 < x \end{cases}$$



on vähenevä, mutta ei aidosti vähenevä (yksityiskohdat HT)

d)

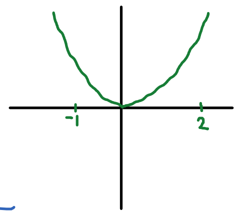
Funktio

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

ei ole monotoninen,

koska esimerkiksi $-1 < 0 < 2$, mutta

$$f(-1) > f(0) < f(2).$$



Potensseille $n \in \mathbb{N}$ saadaan monotonisuustulos kun tarkastellaan vain arvoja $x > 0$:

Lemma 2.7.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$.

Tällöin potenssifunktio

$$f:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad f(x) = x^n$$

on aidosti kasvava.

Todistus

(2 eri tapaa:)

1)

Olkoot $0 < x_1 < x_2$.

Pitää osoittaa, että

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Koska $x_1 < x_2$, niin

$$x_2 - x_1 > 0,$$

joten

$$x_2^n - x_1^n \underset{\text{L 1.1}}{=} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_2^{n-k} x_1^{k-1}}_{>0,\ \text{koska } x_1, x_2 > 0} > 0,$$

joten

$$x_2^n > x_1^n$$

Ok!

2)

Vaihtoehtoinen todistus induktiolla on HT (harj. 5)

Seuraus 2.8.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja

$$f:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad f(x) = x^n,$$

sekä olkoon

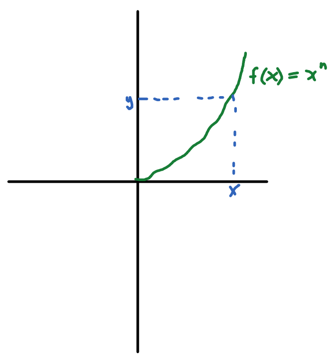
$$y \in]0, \infty[.$$

Tällöin on olemassa tasan yksi

$$x \in]0, \infty[,$$

jolle pätee

$$f(x) = y \quad (eli\ x^n = y).$$



Todistus

Että todella löytyy ainakin yksi $x \in]0, \infty[$, jolle pätee

$$f(x) = y,$$

todistetaan f:n jatkuvuuden avulla kurssilla RAJ.

Osoitetaan nyt, että ei voi olla useampia tällaisia $x \in]0, \infty[$:

Antiteesi: On $x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 > 0$

joille

$$x_1^n = y = x_2^n.$$

Mutta koska

$$x_1 \neq x_2,$$

niin joko

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) = f(x_1) \quad \lightning$$

tai

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_1) \quad \lightning$$

On siis tasan yksi $x \in]0, \infty[$ jolle pätee

$$f(x) = y.$$

Ok!

10. lokakuuta 2014 10:15

Seurauksen 2.8 avulla voidaan määritellä luvun

$$y \in]0,\infty[$$

n:s juuri asettamalla, että

$$\sqrt[n]{y}$$

on "se $x \in]0,\infty[$, jolle pätee $x^n = y$", eli $\sqrt[n]{y}$ on yhtälön

$$x^n = y$$

yksikäsitteinen ratkaisu $x > 0$.

Toisin sanoen, kun

$$x, y \in]0,\infty[,$$

niin

$$x = \sqrt[n]{y} \iff x^n = y$$

Käytetään myös merkintää

$$\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}.$$

Näin saadaan määritellyksi funktion

$$f:]0,\infty[\to]0,\infty[, \qquad f(x) = x^n$$

käänteisfunktio

$$f^{-1}:]0,\infty[\to]0,\infty[, \qquad f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

eli n:s juurifunktio.

Huom.

Jos

$$y = f(x) = x^n,$$

niin

$$x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}},$$

niin saadaan, että

$$y = f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = (f \circ f^{-1})(y)$$

sij $x = f^{-1}(y)$

ja

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f(x)\right) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

(eli $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n, kun\ x > 0$).

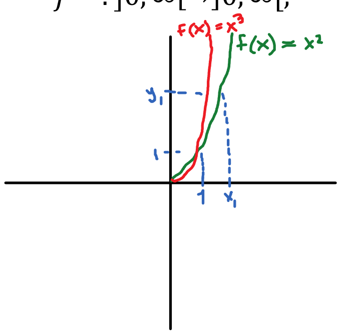
Esim.

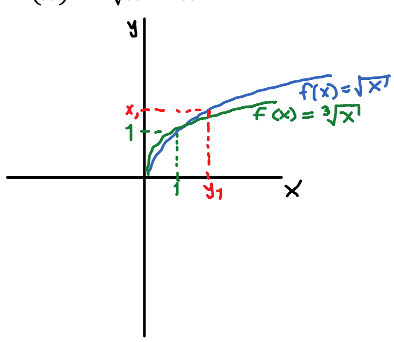
Kun

$$f:]0,\infty[\to]0,\infty[, \qquad f(x) = x^2,$$

niin käänteiskuvauksena saadaan

$$f^{-1}:]0,\infty[\to]0,\infty[, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$





Lemma 2.9.

Kun $n \in \mathbb{N}$, niin funktio

$$g:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad g(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

on aidosti kasvava.

Todistus

HT.

Nyt on määritelty potenssit x^n ja $x^{\frac{1}{n}}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ kun $x > 0$.
Kun $m, n \in \mathbb{N}$, niin pätee

$$x^{n+m} = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n+m \text{ kpl}} = \underbrace{(x * x * x)}_{n \text{ kpl}}\underbrace{(x * x)}_{m \text{ kpl}} = x^n * x^m$$

ja vastaavasti

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad (mieti!)$$

Halutaan, että samat säännöt pätevät kaikille $n, m \in \mathbb{Z}$,
joten erityisesti pitää olla

$$x^n = x^{n+0} = x^n + x^0 \Rightarrow x^0 = 1$$

halutaan

ja

$$1 = x^0 = x^{n-n} = x^n * x^{-n} \Rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Määritellään siis kaikille $x > 0$, että

$$x^0 = 1,$$

ja

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(ja $x^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$).

Rationaaliset potenssit

Kun

$$q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,$$

niin määritellään kaikille $x > 0$ että

$$x^q = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Toisin sanoen, jos merkitään

$$f_n:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad f_n(x) = x^n,$$

niin saamme funktion

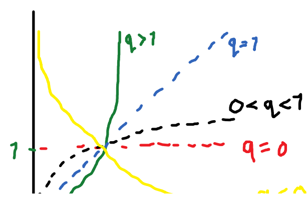
$$g:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad g(x) = f_n^{-1}(f_m(x)) \ \left(= (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^q\right)$$

Lause 2.10.

Olkoon $q \in \mathbb{Q}$.
Tällöin potenssifunktio

$$g:]0, \infty[\to]0, \infty[, \qquad g(x) = x^q$$

on

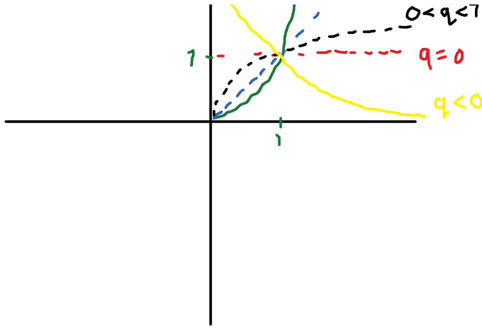


Tällöin potenssifunktio

$$g:]0,\infty[\to]0,\infty[, \qquad g(x) = x^q$$

on

a) aidosti kasvava kun $q > 0$
b) aidosti vähenevä kun $q < 0$
c)vakio $g(x) = 1\ kun\ q = 0$.



Todistus

a)

Jos $q > 0$, niin

$$q = \frac{m}{n},$$

missä $m, n \in \mathbb{N}$. Siispä

$$g(x) = f_n^{-1}(f_m(x))$$

ja koska $f_m\ ja\ f_n^{-1}$ ovat aidosti kasvavia, on myös g aidosti kasvava (HT).

b)

Jos $q < 0$, niin

$$q = -\frac{m}{n}, \qquad missä\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin

$$g(x) = \frac{1}{f_n^{-1}(f_m(x))}$$

on aidosti vähenevä (HT).

c)

On selvä.

Lause 2.11

Olkoot

$$x, y \in]0,\infty[, \qquad p, q \in \mathbb{Q}.$$

Tällöin

a) $x^p * x^q = x^{p+q}$
b) $(x^p)^q = x^{pq}$
c) $(xy)^p = x^p y^p$.

Todistus

a) ja c) kohtiin tulee todistus monisteella

b)

HT.

(Huom. Nämä säännöt oletetaan tunnetuiksi tapauksessa $p, q \in \mathbb{Z}$)

Huom.

Irrationaaliset potenssit

$$x^z, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

luvuille $x > 0$ määritellään myöhemmin.

3. Yleistä funktioista

(Katso myös Juutisen Johdatus matematiikkaan -moniste, luku 3)

Määritelmä

(funktio, osa 2).

Olkoot A ja B mitä tahansa joukkoja. Funktio (eli kuvaus)

$$f: A \to B$$

on sääntö, joka liittää jokaiseen lähtöjoukon (eli määrittelyjoukon) A alkioon $a \in A$ tasan yhden maalijoukon B alkion $b \in B$, jota merkitään $b = f(a)$ ja sanotaan f:n arvoksi pisteessä a.

Voidaan merkitä myös $a \mapsto f(a)$.

Huom.

Funktiot

$$f: A \to B, ja$$
$$g: C \to D$$

ovat samat jos ja vain jos

$$A = C,$$
$$B = D, ja$$
$$f(a) = g(a) \;\; kaikille \; x \in A \quad (= C).$$

Esim.

a)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

on eri funktio kuin

$$g:]0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$$

b)

Olkoon

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}.$$

Määritellään

$$f(a) = 2,$$
$$f(b) = 1,$$
$$f(c) = 2,$$
$$f(d) = 5.$$

Tällöin f on funktio

$$f: A \to B,$$

sillä jokaiseen A:n alkioon on liitetty tasan yksi B:n alkio.

Määritelmä

Olkoon

$$f: A \to B$$

funktio ja olkoon

$$U \subset A \; ja \; V \subset B.$$

Tällöin joukon $U \subset A$ kuvajoukko on

$$f(U) = \{y \in B: y = f(x) \; jollekin \; x \in U\} = \{f(x): x \in U\}.$$

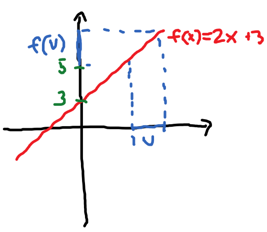
Joukon $V \subset B$ alkukuva on puolestaan

$$f^{\{-1\}}(V) = \{x \in A: f(x) \in V\}$$

Siis

$$f(U) \subset B \; kun \; U \subset A \; ja$$
$$f^{\{-1\}}(V) \subset A \; kun \; V \subset B.$$

Esim.



Olkoon

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x + 3,$$
$$U = [1,2], \qquad V =]-1,2[.$$

Tällöin

$$f(U) = \{y \in \mathbb{R}: y = f(x) \; jollakin \; x \in U\} = \{y \in \mathbb{R}: y = 2x + 3, x \in [1,2]\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}: 5 \le y \le 7\} = [5,7]$$

ja

$$f^{\{-1\}}(V) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in V\} = \{x \in \mathbb{R}: \underbrace{2x + 3 \in]-1,2[}\} =]-2, -1/2[.$$

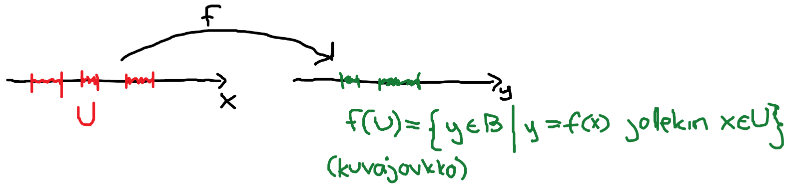
ja

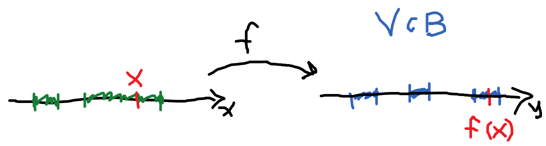
$$f^{\{-1\}}(V) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in V\} = \{x \in \mathbb{R}: \underbrace{2x + 3 \in]-1,2[}\ \} =]-2, -1/2[.$$

$$\Leftrightarrow -1 < 2x + 3 < 2$$

$$\Leftrightarrow -4 < 2x < -1$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < -\frac{1}{2}$$

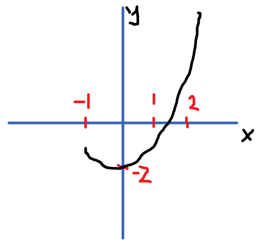




$f^{\{-1\}}(V) = \{x \in A: f(x) \in V\}$
(alkukuva)

Esim.

Olkoon $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2$



Tällöin

$f(] - 1,2[\,) = \{y \in \mathbb{R}: y = f(x), x \in]1,2[\,\} = \{y \in \mathbb{R}: y = x^2 - 2, x \in] - 1,2[\,\}$

(*)
$= [-2, 2[$

Perustelu (*) :lle:

"⊂" olkoon $y = x^2 - 2, missä\ x \in] - 1,2[\ (eli\ \ -1 < x < 2)$.
Tällöin erityisesti

$|x| < 2,$

$joten$

$0 \le x^2 < 4,$

$joten$

$-2 \le \underbrace{x^2 - 2}_{y} < 2.$

Siispä

$y \in] - 2,2[.$

"⊃" Olkoon $y \in] - 2,2[$.
Pitää siis löytää $x \in] - 1,2[$, jolle pätee

$y = f(x)\ eli\ y = x^2 - 2\ eli\ x^2 = y + 2.$

Koska $y \ge -2, niin\ y + 2 \ge 0$, joten voidaan valita

$x = \sqrt{y + 2},$

jolloin

$0 \le x = \sqrt{y + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2.$

Siispä

$x \in]0,2[\subset] - 1,2[$

ja

$f(x) = \underbrace{\left(\sqrt{y + 2}\right)^2}_{= y+2} - 2 = y$

Ok.

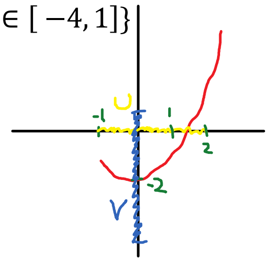
$f^{\{-1\}}([\,-4, 1\,]) = \{x \in [-1, \infty[: f(x) \in [\,-4, 1]\}$

$f^{\{-1\}}([\,-4,1\,]) = \{x \in [-1,\infty[: f(x) \in [\,-4,1]\}$

$= \{x \in [-1,\infty[: -4 \leq x^2 - 2 \leq 1\}$

$= \{x \in [-1,\infty[: -2 \leq \underbrace{x^2 \leq 3}_{|x|^2 \leq 3}\}$

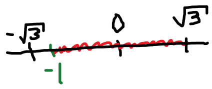
aina totta



$= \{x \in [\,-1,\infty[: |x| \leq \sqrt{3}\}$

$= [\,-1,\infty[\, \cap [-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

$= [\,-1,\sqrt{3}].$



Määritelmä

Funktio $f: A \to B$ on

1) injektio

jos f kuvaa eri pisteet aina eri pisteiksi, ts. jos $x_1, x_2 \in A$ ja $x_1 \neq x_2$, niin

$f(x_1) \neq f(x_2)$

(eli $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

2) surjektio

jos jokaiseen $y \in B$ kuvautuu joku $x \in A$, ts. $f(A) = B$, eli kaikille $y \in B$ on olemassa $x \in A$ siksi, että $y = f(x)$.

3) bijektio

jos f on sekä injektio että surjektio.

Huom.

a)

$f: A \to B$ on injektio, jos ja vain jos kaikille $x_1, x_2 \in A$ ehdosta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$.
(eli

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$)

b)

Funktio $f: A \to f(A)$ on aina surjektio.

Esim.

Olkoon $f(x) = -2x + 3$. Tällöin f on

- injektio:

  Jos $f(x_1) = f(x_2), niin\ -2x_1 + 3 = -2x_2 + 3 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
  Ok.

- surjektio:

  Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Tällöin

  $$y = f(x) \iff y = -2x + 3 \iff y - 3 = -2x$$

  $$\iff x = -\frac{1}{2}(y-3) = \frac{3}{2} - \frac{y}{2}$$

  Siis jos valitaan

  $$x = \frac{3}{2} - \frac{y}{2},$$

  niin

$$f(x) = y.$$
Ok.

- Siis f on myös bijektio.

Esim.

a)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$

Ei ole injektio, koska esim. $-1 \neq 1$, mutta

$$f(-1) = 1 = f(1).$$

Ei ole myöskään surjektio, koska esim.

$$f(x) \neq -1 \text{ kaikille } x \in \mathbb{R}$$

ja -1 kuuluu maalijoukkoon $\mathbb{R}$.

b)

$f: [0, \infty[\to [0, \infty[, \qquad f(x) = x^2,$

on injektio ja surjektio.

Perustelu:

f on injektio, koska f on aidosti kasvava (vrt. Lause 3.1).

f on surjektio, koska jos $y \in [0, \infty[$, niin valitaan

$$x = \sqrt{y}, \text{ jolloin } f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y.$$

Ok.

c)

$f: \mathbb{R} \to [0, \infty[, \qquad f(x) = x^2,$

on surjektio, mutta ei injektio.

d)

$f: [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2,$

on injektio, mutta ei surjektio.

Lause 3.1.

Olkoon $f: A \to \mathbb{R}$ aidosti monotoninen.

Tällöin f on injektio.

Todistus

1)

Oletetaan ensin, että f on aidosti kasvava. Olkoot $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$.

Tällöin joko

$x_1 < x_2$, mistä seuraa, että $f(x_1) < f(x_2)$

tai

$x_1 > x_2$, mistä seuraa, että $f(x_1) > f(x_2)$.

Siis joka tapauksessa $f(x_1) \neq f(x_2)$, joten f on injektio.

2)

Jos f on aidosti vähenevä, niin voidaan tehdä vastaava päättely (mieti!).

Ok.

Määritelmä

Olkoon $f: A \to B$ bijektio.

Tällöin jokaiselle $y \in B$ on olemassa tasan yksi $x \in A$

(koska f surjektio) (koska f injektio)

surjektio) injektio)

jolle pätee

$$f(x) = y.$$

Näin ollen voimme määritellä kuvauksen

$$g: B \to A$$

asettamalla kaikille $y \in B$, että

$$g(y) = x,$$

missä x on se yksikäsitteinen A:n alkio, jolle pätee

$$f(x) = y.$$

Tällöin merkitään

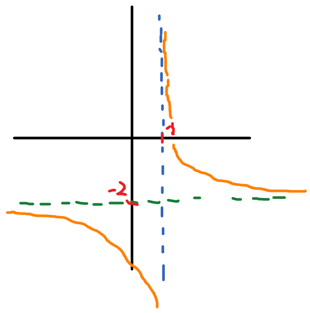
$$g = f^{-1},$$

ja sanotaan, että g on f:n käänteisfunktio. Pätee siis

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y} \quad (x \in A, y \in B)$$

Esim.

Olkoon $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \frac{3-2x}{x-1} \left(= \frac{1}{x-1} - 2\right)$.



Osoita, että f on bijektio ja määritä käänteiskuvaus f^{-1}.
(Huomaa, että f ei ole (aidosti) monotoninen)

Ratkaisu:

1)

f on injektio:
Olkoot $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Tällöin

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3 - 2x_1}{x_1 - 1} = \frac{3 - 2x_2}{x_2 - 1}$$

koska $x_1, x_2 \neq 1$

$$\Rightarrow (3 - 2x_1)(x_2 - 1) = (3 - 2x_2)(x_1 - 1)$$

$$\Rightarrow 3x_2 - \cancel{3} \underbrace{- 2x_1x_2} + 2x_1 = 3x_1 - \cancel{3} \underbrace{- 2x_2x_1} + 2x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1.$$

Ok.

2)

f on surjektio:
Olkoon $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Pitää löytää $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jolle pätee

$$y = f(x).$$

Kun $x \neq 1$, niin

$$y = f(x) \iff y = \frac{3-2x}{x-1} \overset{x \neq 1}{\iff} y(x-1) = 3 - 2x \iff yx - y = 3 - 2x$$

$$\iff \underbrace{yx + 2x}_{= x(y+2)} = y + 3 \underset{y \neq -2}{\iff} x = \frac{y+3}{y+2}.$$

Lisäksi

$$\frac{y+3}{y+2} \neq 1 \quad \left(muuten \frac{y+3}{y+2} = 1 \Rightarrow y + 3 = y + 2 \Rightarrow 3 = 2 \quad ↯ \right)$$

Siispä luvulle $x = \frac{y+3}{y+2} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pätee, että $f(x) = y$,
joten f on surjektio.

Lisäksi nähdään, että

$$f(x) = y \iff \underbrace{x = \frac{y+3}{y+2}}_{= f^{-1}(y)\,!},$$

joten f:n käänteisfunktio

$$f^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \frac{x+3}{x+2}.$$

4. Lisää alkeisfunktioita

4.1. Eksponentti- ja logaritmifunktiot

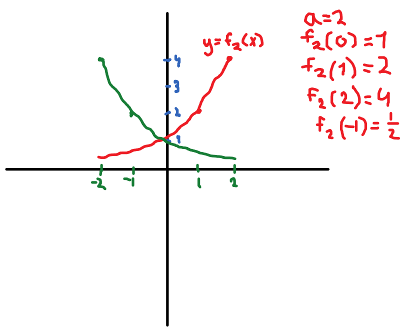
Olkoon $a > 0$. Luvussa 2.3. määriteltiin potenssi a^q *kaikille* $q \in \mathbb{Q}$, joten voimme märitellä funktion

$$f_a: \mathbb{Q} \to]0,\infty[, \qquad f_a(x) = a^x.$$

Tällöin pätee:

Lemma 4.1.

Funktio f_a on
a) aidosti kasvava, jos $a > 1$
b) aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$
c) vakiofunktio 1 jos $a = 1$.



Todistus

a)

Olkoot $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ siten, että

$$x_1 < x_2.$$

Tällöin

$$a^{x_2} = a^{x_1+(x_2-x_1)}$$

$$= a^{x_1} * \underbrace{a^{x_2-x_1}}_{> 1^{x_2-x_1} = 1 \;⊛} > a^{x_1} * 1 = a^{x_1}$$

L 2.11.a

eli

$$f_a(x_1) = a^{x_1} < a^{x_2} = f(x_2).$$

Ok.

(Perustelu ⊛:lle:

Funktio $g:]0,\infty[\to]0,\infty[, \quad g(z) = z^{x_2-x_1} \quad (Huom.\, x_2 - x_1 \in \mathbb{Q})$

on aidosti kasvava, sillä $x_2 - x_1 > 0$ $(L.\, 2.10)$

b)

Todistetaan vastaavasti ja c) on selvä.

Ok.

Koska f_a on aidosti monotoninen kun $a \neq 1$, niin on olemassa täsmälleen yksi tapa laajentaa f_a aidosti monotoniseksi funktioksi kaikille $x \in \mathbb{R}$. Näin saadaan (a-kantainen) eksponenttifunktio

$f_a\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$,

joka on

a) aidosti kasvava, jos $a > 1$.
b) aidosti vähenevä, jos 0 < a < 1.
c) vakiofunktio $f_a(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ jos\ a = 1$

(perustelut RAJ-kurssilla)

Tutkitaan seuraavassa tapausta $a = 2$ ja merkitään

$f = f_2$. (Muut kantaluvut käsitellään vastaavasti.)

Koska f on aidosti kasvava, on f injektio (Lause 3.1).
Lisäksi f on surjektio,

ts. $f(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ (jatkuvuuden nojalla, RAJ),

joten f on bijektio.
Siispä f:llä on olemassa käänteisfunktio

$f^{-1}\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

Tätä sanotaan 2-kantaiseksi logaritmifunktioksi, ja merkitään

$f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Siis

$\boxed{y = 2^x \iff x = \log_2 y,}\ kun\ x \in \mathbb{R}, y > 0$

Erityisesti

$y = 2^{\log_2 y} \quad ja \quad x = \log_2 2^x$.

Esim.

Koska $2^0 = 1, niin\ 0 = \log_2 1$
$2^2 = 4, niin\ 2 = \log_2 4$.

Eksponentti- ja logaritmifunktioilla on seuraavat ominaisuudet (yleistyvät myös muille a:n arvoille).

Lause 4.2.

a) $2^x * 2^y = 2^{x+y} \quad ja \quad (2^x)^y = 2^{xy} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
b) $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.
c) $\log_a(x^\alpha) = \alpha * \log_2 x \qquad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
d) $\log_a ⬚ \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava.

Todistus

a)

Pätee kaikille $x, y \in \mathbb{Q}$, (L.2.11)
ja laajenee kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ aidon monotonisuuden kautta (yksityiskohdat RAJ).

b)

Nyt

$$2^{\log_2 xy} = xy = 2^{\log_2 x} * 2^{\log_2 y} \overset{a)}{=} 2^{\log_2 x + \log_2 y}$$

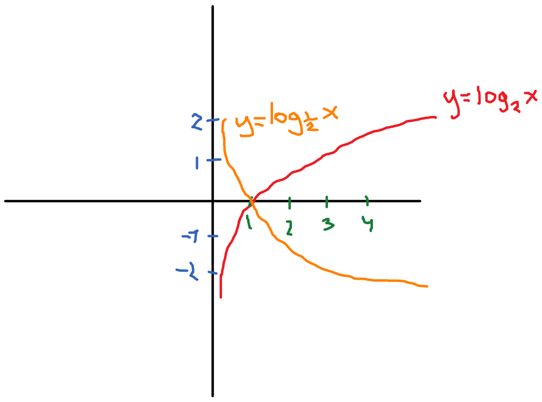
Koska f_2 on injektio, niin täytyy siis olla $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$.

c)

Kuten (b), HT.

d)

Aidosti kasvavan funktion käänteisfunktio on aina aidosti kasvava (HT).
Ok.



Huom.

Aiemmin määriteltiin x^q kaikille $x > 0$ ja $q \in \mathbb{Q}$.
Koska

$$x = 2^{\log_2 x},$$

niin kaikille $z \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$x^z = \left(2^{\log_2 x}\right)^z = 2^{z*\log_2 x}$$

L.4 2.a

Siis esim.

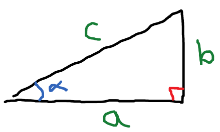
$$x^\pi = 2^{\pi \log_a x} \; kaikille \; x > 0$$

4.2. Trigonometriset funktiot

Muista, että kun α suorakulmaisen kolmion terävä kulma (kuten kuvassa), niin

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

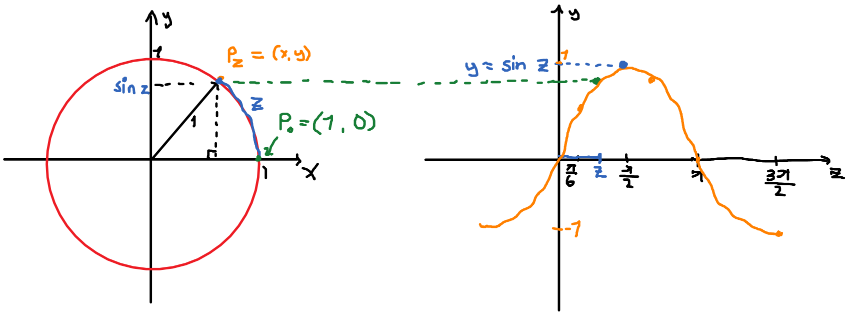
$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$



$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Yleistetään nämä trigonometriset funktiot kaikille reaaliluvuille $z \in \mathbb{R}$ yksikköympyrän

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \text{ avulla:}$$



Olkoon $z \in \mathbb{R}$. Lähdetään liikkeelle pisteestä $P_0 = (1,0)$
ja kuljetaan yksikköympyrää S pitkin matka z (vastapäivään jos $z \geq 0$ ja
myötäpäivään jos $z < 0$).

Saavutaan pisteeseen $P_z = (x, y) \in S$.
Tällöin määritellään

$$\sin z = y \quad ja \quad \cos z = x.$$

Lisäksi

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad kun \cos z \neq 0,$$

eli kun

$$z \neq \frac{\pi}{2} + k * \pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

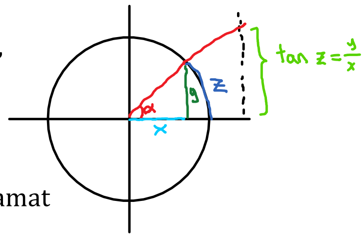
Huom.

a)

Jos α on yksikköympyrän kaarta z vastaava kulma, niin z on kulman α suuruus radiaaneissa.
Nyt siis

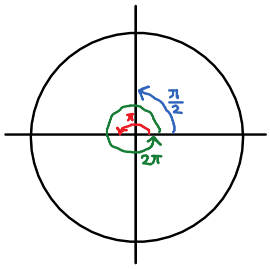
$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \quad ja \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x,$$

joten yleinen määrittely antaa sinille ja kosinille samat arvot kuin kolmiosta saatavat kun $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.



b)

Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, saadaan siis esimerkiksi:



$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin\pi = 0, \cos\pi = -1$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1, \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=\cos(-\frac{\pi}{2})} = 0$$

$= \sin\frac{\pi}{2}$

$$\sin 2\pi = \sin 0 = 0, \cos 2\pi = \cos 0 = 1$$

Seuraavat trigonometristen funktioiden ominaisuudet nähdään suoraan määritelmästä:

Lause 4.3.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$.
Tällöin

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (Pythagoras!)$ (merkitään $\sin^2 x = (\sin x)^2$)

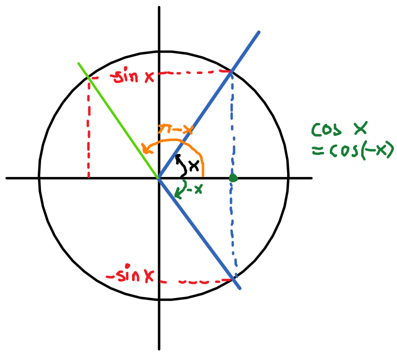
b) $\sin(x + k * 2\pi) = \sin x$
ja
$\cos(x + k * 2\pi) = \cos x \;\; kaikille \; k \in \mathbb{Z}$,
(toisin sanoen, sini ja kosini ovat 2π-jaksollisia)

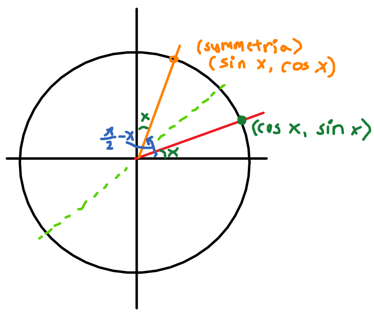
c) $\sin(-x) = -\sin x \quad ja \quad \cos(-x) = \cos x$

d) $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$

e) $-1 \le \sin x \le 1 \quad ja \quad -1 \le \cos x \le 1$
(ts. $|\sin x| \le 1 \quad ja \quad |\cos x| \le 1$)

f) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\overset{c)}{=} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$





Lause 4.3.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$.
Tällöin

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad (Pythagoras!)$ (merkitään $\sin^2 x = (\sin x)^2$)

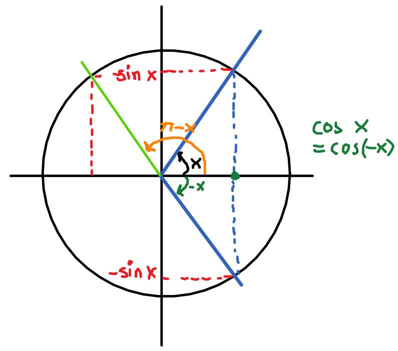
b) $\sin(x + k * 2\pi) = \sin x$
ja
$\cos(x + k * 2\pi) = \cos x \; kaikille \; k \in \mathbb{Z}$,
(toisin sanoen, sini ja kosini ovat 2π-jaksollisia)

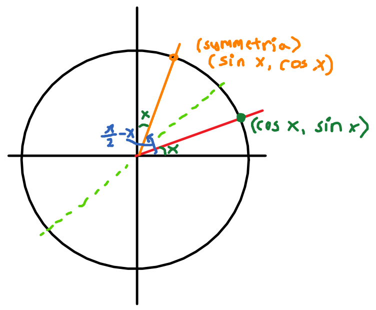
c) $\sin(-x) = -\sin x \quad ja \quad \cos(-x) = \cos x$

d) $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$

e) $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad ja \quad -1 \leq \cos x \leq 1$
(ts. $|\sin x| \leq 1 \quad ja \quad |\cos x| \leq 1$)

f) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\overset{c)}{=} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



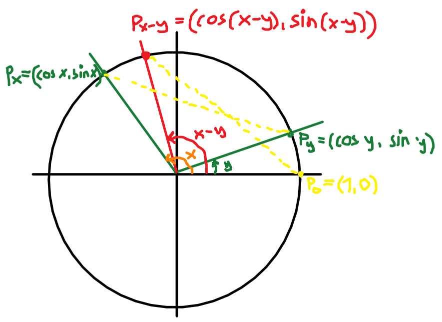


Käytännössä kaikki muut tarvittavat trigonometriset kaavat (vrt. MAOL) saadaan lauseen 4.3. kaavojen (erityisesti (a)) ja seuraavan kosinin vähennysaskukaavan avulla:

Lause 4.4.

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\,.$$

Todistus



Pisteiden $P_x \; ja \; P_y$ välinen etäisyys $d(P_x, P_y)$ on yhtä suuri kuin pisteiden $P_{x-y} \; ja \; P_0$ välinen etäisyys $d\left(P_{x-y}, P_0\right)$ (keltaiset katkoviivat), (koska vastaavien ympyrän S kaarien pituus on x-y).

Siten myös

$$d\left(P_{x-y}, P_0\right)^2 \overset{\text{(etäisyyskaava/ Pythagoras)}}{=} (\cos(x-y) - 1)^2 + (\sin(x-y) - 0)^2$$

$$= \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y)$$

L 4.3.a

$$= -2\cos(x-y) + 2$$

ja

$$d(P_x, P_y)^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 =$$

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y$$

1 1

$$= -2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + 2$$

ovat yhtäsuuret, ts.

$$-2\cos(x-y) + 2 = -2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + 2$$

joten

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\,.$$

Ok.

Lause 4.5.

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin

a)

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

b)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

c)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \left(kun\ x, y, x+y\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Todistus

a)

Seuraa L.4.4:stä:

$$\cos(x+y) = \cos(x - (-y)) = \cdots$$

b)

Seuraa a):sta ja L.4.3.f). (HT).

c)

Seuraa a):sta ja b):stä. (HT).

Huom.

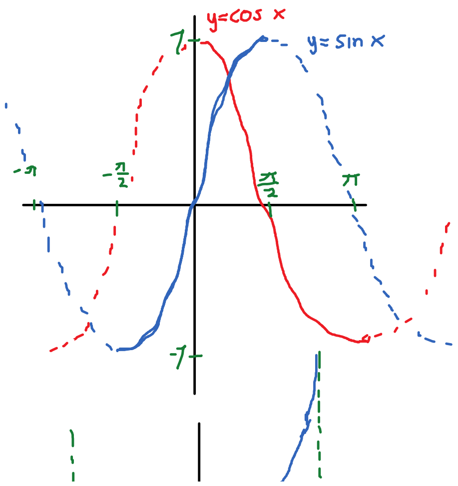
Näiden kaavojen avulla voidaan todistaa paljon muita kaavoja. Esimerkiksi tapauksesta $x = y$ saadaan hyödylliset kaavat

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

ja

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \ (= 2\cos^2 x - 1)$$

4.3. Trigonometriset käänteisfunktiot



Funktiot

$$sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

ja

$$cos\colon [0, \pi] \to [-1,1]$$

ovat aidosti monotonisia surjektioita, samoin

$$tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

(tarkat perustelut ohitetaan)

Siispä näillä on olemassa käänteisfunktiot

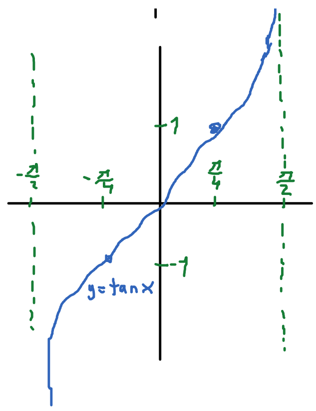
$$arc\ sin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Siispä näillä on olemassa käänteisfunktiot

$$arc\ sin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$arc\ cos\colon [-1,1] \to [0, \pi]$$

$$arc\ tan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$



Siis esimerkiksi

$$arc\ \sin(\sin x) = x, \qquad kun\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ja

$$\cos(arc\ \cos x) = x, \qquad kun\ x \in [-1,1].$$

Lisäksi esimerkiksi

$$\sin(\underbrace{arc\cos x}_{=y}) \overset{\text{L.4.3 a}}{=} \sin y = \pm\sqrt{1 - \underbrace{\cos^2 y}_{=(\cos(arc\cos x))^2 = x^2}} = \sqrt{1 - x^2}, \qquad kun\ x \in [-1,1].$$

5. Kompleksiluvut

5.1. Määritelmä ja laskutoimitukset

Kun $a, b, c \in \mathbb{R}$, niin $ax^2 + bx + c = 0$

<=> $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Jos $b^2 - 4ac < 0$, eivät nämä luvut x voi olla reaalilukuja, eikä yhtälöllä siis ole (reaalisia) ratkaisuja. Jos negatiivisten lukujen neliöjuuret osattaisiin määritellä/tulkita, saataisiin tässäkin tapauksessa yhtälölle ratkaisu.

Idea

Itse asiassa riittää, kun määritellään "luku"

$$i = \sqrt{-1}\ (eli\ i^2 = -1),$$

ja tulkitaan muotoa

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

olevia "lukuja".

Jos oletetaan, että $\mathbb{R}$:n laskutoimitusten ominaisuudet ovat edelleen voimassa, saadaan luvuille

$$z_1 = x_1 + iy,$$

ja

$$z_2 = x_2 + iy_2,$$

että

a)

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

b)

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Kun "luku" $z = x + iy$ tulkitaan lukupariksi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ saadaan täsmälleen määritelmä:

Määritelmä:

Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on taso

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

varustettuna

a)

yhteenlaskulla $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

b)

kertolaskulla $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Huom.

a)

Koska $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2 + 0, 0 + 0) = (x_1x_2, 0),$$

niin luvut $(x, 0) \in \mathbb{C}$, $\quad missä\ x \in \mathbb{R}$,
käyttäytyvät täsmälleen samoin kuin reaaliluvut.
Siksi voidaankin merkitä lyhyesti, että

$$(x, 0) = x \in \mathbb{R}.$$

b)

Koska

$$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0) = -1,$$

on kompleksiluku $(0,1)$ yhtälön

$z^2 = -1$ ratkaisu.

Merkitään tätä lukua symbolilla $i = (0,1)$.

c)

Näillä merkinnöillä kaikille $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ pätee

$$z = (x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{=x} + \underbrace{(0, y)}_{\underbrace{(y,0)}_{y}\underbrace{(0,1)}_{i}} = x + yi = x + iy$$

d)

On suoraviivaista tarkistaa, että kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskut ovat assosiatiivisia, kommutatiivisia ja distributiivisia.
Lisäksi jokaisella kompleksiluvulla $z = (x, y)$ on vastaluku

$$-z = (-x, -y) \in \mathbb{C},$$

ja käänteisluku

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right), \qquad kun\big(z \neq 0 = (0,0)\big)$$

$$\Big(koska\ z + (-z) = (x - x, y - y) = (0,0) = 0 \quad ja \quad z * z^{-1}$$

$$= (x, y) * \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \underset{\text{mieti!}}{\cdots} = (1,0) = 1\Big)$$

e)

Kun $z, w \in \mathbb{C}$, niin määritellään vähennys- ja jakolaskut asettamalla

$$z - w = z + (-w)$$

ja

$$\frac{z}{w} = z * w^{-1}, \qquad (kun\ w \neq 0).$$

Määritelmä

Olkoon

$$z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Tällöin luvun z

a)

reaaliosa on $Re(z) = x \in \mathbb{R}$ ja
imaginaariosa on $Im(z) = y \in \mathbb{R}$.

b)

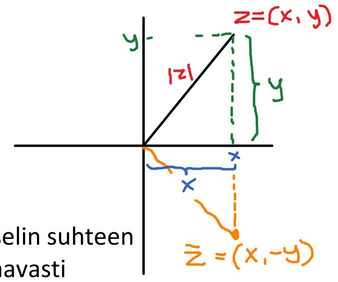
kompleksikonjugaatti eli liittoluku on

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy \in \mathbb{C}$$

c)

itseisarvo eli moduli on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in]0, \infty[.$$



Huom.

Geometrisesti z on z:n peilaus x-akselin suhteen ja $|z|$ on z:n etäisyys origosta. Vastaavasti $|z - w|$ on kompleksilukujen z ja w etäisyys.

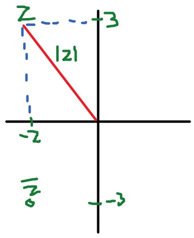
Esim.

Olkoon

$$z = -2 + 3i.$$

Tällöin

$$Re(z) = -2, \qquad Im(z) = 3,$$
$$\bar{z} = -2 - 3i \quad ja$$
$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$



Lause 5.1.

Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Tällöin

a)
$$\bar{\bar{z}} = z$$

b)
$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad ja \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

c)
$$|\bar{z}| = |z|$$

d)
$$z\bar{z} = |z|^2$$

e)
$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

f)
$$|Re(z)| \leq |z|, \qquad |Im(z)| \leq |z|$$

g)
$$|zw| = |z||w|$$

h)
$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad (\Delta\text{-ey})$$

ja

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z + w|. \quad (\text{käänt. } \Delta\text{-ey})$$

Todistus

Olkoot

$$z = x + iy$$

ja

$$w = a + ib.$$

a)
$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x - (-iy) = x + iy = z$$

b)
$$\overline{z+w} = \overline{(x+a) + i(y+b)} = (x+a) - i(y+b)$$
$$= \underbrace{x - iy}_{\bar{z}} + \underbrace{a - ib}_{\bar{w}} = \bar{z} + \bar{w}. \text{ Ok.}$$

c)

HT.

d)
$$z * z = (x + iy)(x - iy) = x^2 - \underbrace{(iy)^2}_{i^2 y^2} = x^2 - (-1) * y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

e)

HT. $\left(Laske \frac{z+\bar{z}}{2} = \right)$

f)
$$|Re(z)|^2 \leq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 = |z|^2$$

$$\Rightarrow |Re(z)| \leq |z|$$
$$(koska\ molemmat\ positiivia, L. 1.1. g)$$

g)

HT.

h)
$$|z + w|^2 \overset{d)}{=} (z + w)\underbrace{(\overline{z + w})}_{b)\ \bar{z}+\bar{w}} = \underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2} + z\bar{w} + z\bar{w} + \underbrace{w\bar{w}}_{|w|^2}$$

$$= |z|^2 + \frac{2(zw + zw)}{2} + |w|^2 \qquad f)$$

$$= |z|^2 + \underbrace{\frac{2(zw + zw)}{2}}_{\overset{e)}{=} 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le 2|\mathrm{Re}(z\bar{w})| \overset{f)}{\le} 2|z\bar{w}|} + |w|^2$$

$\le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$
$\Rightarrow |z + w| \le |z| + |w|$
$(koska\ molemmat\ positiivisia)$

Käänteinen kolmioepäyhtälö todistetaan kuten $\mathbb{R}$:ssä. Ok.

Esim.

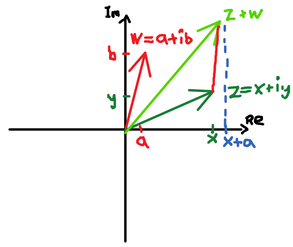
Esitä kompleksiluku $\frac{2+5i}{3-4i}$ muodossa $x + iy$.

Ratkaisu:
Lavennetaan nimittäjän konjugaatilla, jolloin nimittäjästä tulee reaaliluku (vrt. L.5.1.(d)).
Siispä

$$\frac{2+5i}{3-4i} = \frac{(2+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6 + 8i + 15i - 20}{3^2 + 4^2} = \frac{-14 + 23i}{25} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$$

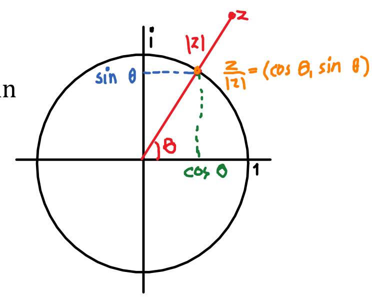
5.2. Napakoordinaattiesitys ja kertolaskun geometria

Kompleksilukujen yhteenlaskun geometrinen tulkinta on selvä:



Entä kertolasku?

Olkoon $z = (x, y) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$
ja olkoon θ x-akselin ja janan
[0,z] välinen kulma.
Tällöin luku $\frac{z}{|z|}$ on yksikkö-
ympyrällä ja tälle pätee
$\frac{z}{|z|} = (\cos\theta, \sin\theta)$, joten
$z = |z|(\cos\theta, \sin\theta)$
$= |z|(\cos\theta, i\sin\theta)$.



Tämä on luvun z napakoordinaattiesitys. Luku $\theta \in \mathbb{R}$ on luvun $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ argumentti, merkitään
$\theta = \arg(z)$.

Esim.

i)

$2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$,
joten

$\arg(2) = 0, \quad (+k * 2\pi)$

ii)

$3i = 3\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}, \underbrace{i\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right)$,
joten

$\arg(3i) = \frac{\pi}{2}, \quad (+k * 2\pi)$

iii)

$\arg(-5) = \pi\ (+k * 2\pi)$

iv)

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4}, i\sin -\frac{\pi}{4}\right)$.

iv)

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\underbrace{\cos -\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \underbrace{i \sin -\frac{\pi}{4}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right).$$

Napakoordinaattien avulla kertolaskulle saadaan geometrinen tulkinta:

Lause 5.2.

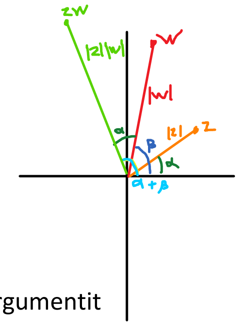
Olkoot $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Tällöin

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$



(Ts. kertolaskussa itseisarvot kerrotaan (reaalilukuja) ja argumentit lasketaan yhteen.)

Todistus

Sinin ja kosinin summakaavojen avulla saadaan

$$zw = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)|w|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha * i\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + \underbrace{i^2}_{-1}\sin\alpha\sin\beta)$$

$$= |x||w|\left(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}\right)$$

$$= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Ok.

Huom.

Induktiolla saadaan lauseesta 5.2. niin sanottu de Moivren kaava:

Kaikille $n \in \mathbb{N}\ ja\ \alpha \in \mathbb{R}$ pätee

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Tästä saadaan ns. "ykkösen juuret":

Lause 5.3.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Tällöin yhtälöllä

$$z^n = 1$$

on n kompleksista ratkaisua

$$z_k, \qquad k = 1,2, \ldots, n,$$

missä

$$z_k = \left(\cos\left(k * \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k * \frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Esim.

Yhtälön $z^6 = 1$ ratkaisut: