Raja-arvot ja jatkuvuus

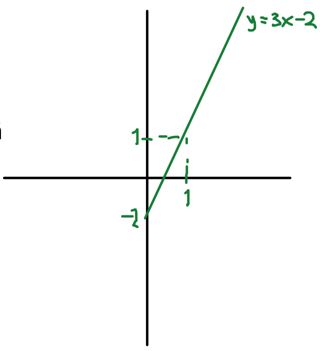
30. lokakuuta 2014 10:11

Suoraa jatkoa kurssille Johdatus reaalifunktioihin (MATP311) (JRF).
Oheislukemista:
Kilpeläinen: Analyysi 1, luvut 3-6,
Spivak: Calculus, luvut 5-8, 22,
Thomson-Bruckner-Bruckner: Elementary real analysis, luvut 1,2,5.
Luennot 34h, viimeinen 12.12.
Harjoitukset 6 kertaa, viimeiset 12.12.
Tentti tiistaina 16.12.
(Uusinta 21.2.2015.)

1. Funktion jatkuvuus

Intuitiivisesti funktion $f: A \to B$ jatkuvuus pisteessä $a \in A \subset \mathbb{R}$ tarkoittaa, että arvo $f(x)$ on lähellä arvoa $f(a)$ aina kun $x \in A$ on lähellä pistettä a.
Toisin sanoen,
$$|f(x) - f(a)|$$
on "pieni" aina, kun
$$|x - a|$$
on "pieni".

Esim.
a)



Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$.
Tällöin pisteelle $a = 1$ saadaan, että
$$|f(x) - f(1)|$$
$$= |3x - 2 - 1| = |3x - 3|$$
$$= |3(x-1)| = 3|x-1|.$$

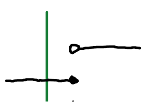
Jos nyt halutaan esimerkiksi, että
$$|f(x) - f(1)| < \frac{1}{10},$$
voidaan valita
$$\delta = \frac{1}{30},$$
ja tällöin ehdosta $|x - 1| < \delta$ saadaan, että
$$|f(x) - f(1)| = 3\underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 3\delta = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Jos taas halutaan, että
$$|f(x) - f(1)| < 10^{-6},$$
niin valitaan
$$\delta = \frac{1}{3} * 10^{-6},$$
ja saadaan, että
$$|f(x) - f(1)| < 10^{-6}$$
aina kun
$$|x - 1| < \delta.$$

Huomataan, että onpa $\epsilon > 0$ mikä tahansa, niin valitsemalla $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, saadaan, että
$$|f(x) - f(1)| = 3|x - 1| < \epsilon$$
aina, kun
$$|x - 1| < \delta.$$

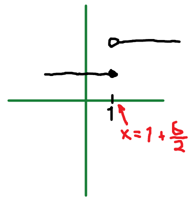
b)

Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \le 1 \\ 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$



Nyt ei ole totta, että

Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \le 1 \\ 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$



Nyt ei ole totta, että

$$|f(x) - f(1)|$$

on pieni aina kun $|x-1|$ on pieni:
Olkoon $\delta > 0$ miten pieni tahansa.
Valitaan $x = 1 + \frac{\delta}{2}$.
Tällöin

$$|x-1| = \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

mutta silti

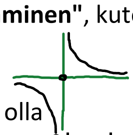
$$|\underbrace{f(x)}_{2,\ \text{koska } x>1} - \underbrace{f(1)}_{1}| = 2 - 1 = 1,$$

eli itseisarvoa $|f(x) - f(1)|$ ei saada pienemmäksi kuin 1, olipa $\delta > 0$ miten pieni tahansa.
Tämä johtuu funktion f "hypystä" kohdassa x=1, joka tekee f:n epäjatkuvaksi.

Esimerkin b)-kohdassa on kyseessä niin sanottu **"hyppäysepäjatkuvuus"**.
Muita epäjatkuvuustyyppejä ovat (ainakin)

- **"äärettomyyteen karkaaminen"**, kuten

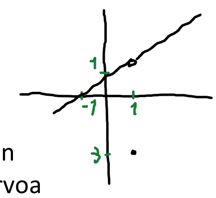
  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

  ($|f(x) - f(0)|$ voi olla todella iso, vaikka $|x - 0| = |x|$ on todella pieni)

- **"poistuva epäjatkuvuus"**, kuten funktiolla

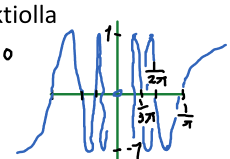
  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \ne 1 \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

  Tästä epäjatkuvuudesta päästäisiin helposti eroon muuttamalla f:n arvoa pisteessä x=1.

- **"raju heilahtelu"**, kuten funktiolla

  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

  Vaikka $\delta > 0$ olisi miten pieni tahansa, saa f välillä $]-\delta, \delta[$ kaikkia arvoja väliltä $[-1,1]$, joten itseisarvoa

  $$|f(x) - f(0)|$$

  ei saada pienemmäksi kuin 1, vaikka olisi $|x - 0| < \delta$.

  (muista: $\sin \frac{1}{x} = 0$
  $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, k \ne 0$
  $\Leftrightarrow x = \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k}$)

Asetetaan nyt täsmällinen määritelmä:

Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f: A \to \mathbb{R}$ funktio.
Funktio f on **jatkuva pisteessä** $a \in A$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

aina kun

$$x \in A \ \ ja \ \ |x - a| < \delta.$$

Funktio f on **jatkuva** (joukossa A), jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in A$.

Huom.

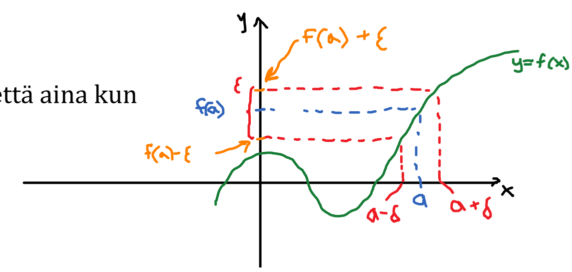
a)

Kun $\epsilon > 0$ on mikä tahansa, niin täytyy siis löytää luku $\delta > 0$ siten, että aina kun

$$|x - a| < \delta, \qquad (eli\ a - \delta < x < a + \delta),$$

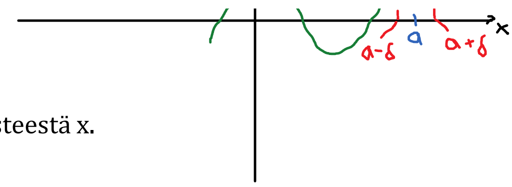
pätee, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon, \qquad (eli\ f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon).$$



b)

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon, \qquad (eli\ f(a)-\epsilon<f(x)<f(a)+\epsilon).$$



b)

Luku $\delta>0$ saa riippua luvuista $\epsilon>0$ ja pisteestä $a\in A$, mutta **EI** pisteestä x.

c)

Jos funktio $f\colon A\to\mathbb{R}$ ei ole jatkuva pisteessä $a\in A$, on se **epäjatkuva** (pisteessä a). Tällöin on siis olemassa joku $\epsilon>0$ siten, että kaikille $\delta>0$ voidaan valita piste $x\in A$ jolle pätee $|x-a|<\delta$, mutta silti $|f(x)-f(a)|\geq\epsilon$.
Kyseinen ϵ voi olla esimerkiksi samaa suuruusluokka kuin funktion f "hyppäys" tai "heilahtelu" epäjatkuvuuskohdassa $a\in A$.

Funktion osoittaminen jatkuvaksi pisteessä $a\in A$ etenee (yleensä) seuraavien vaiheiden mukaisesti:

1)

Otetaan $\epsilon>0$. Tehtävänä on löytää $\delta>0$, niin että aina kun $x\in A\ ja\ |x-a|<\delta$, pätee, että $|f(x)-f(a)|<\epsilon$.

2)

Arvioidaan itseisarvoa $|f(x)-f(a)|$ ja koitetaan saada arvioon näkyviin $|x-a|$, joka saadaan δ:n avulla niin pieneksi kuin halutaan.

3)

Katsotaan arviosta, kuinka pieneksi $\delta>0$ pitää valita, että saadaan haluttu epäyhtälö $|f(x)-f(a)|<\epsilon$.

4)

Jos δ:n valinta onnistuu, on f todistettu jatkuvaksi pisteessä $a\in A$.

Esim.

a)

Osoita, että $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=5x-7$ on jatkuva pisteessä $x=3$.

Ratkaisu:

1)

Olkoon $\epsilon>0$ mikä tahansa.

2)

Nyt $|f(x)-\underbrace{f(3)}_{=8}|=|5x-7-8|=|5x-15|=|5(x-3)|=5|x-3|$.

3)

(halutaan, että $5|x-3|<\epsilon$ <=> $|x-3|<\frac{\epsilon}{5}$)

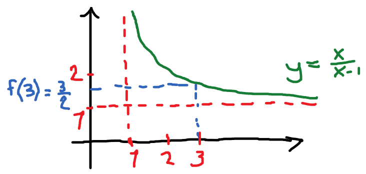
Valitaan $\delta=\frac{\epsilon}{5}$. Tällöin jos $|x-3|<\delta$, niin saadaan $|f(x)-f(3)|=5\underbrace{|x-3|}_{<\delta}<5\delta$ $=5*\frac{\epsilon}{5}=\epsilon$, kuten haluttiin.

4)

Siispä f on jatkuva pisteessä $x=3$.

b)

Osoita, että $f\colon]1,\infty[\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\frac{x}{x-1}$, on jatkuva pisteessä $x=3$.
(huom. $\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$)



Ratkaisu:

1)

Olkoon $\epsilon>0$ mikä tahansa.

2)

Kun $x \in]1,\infty[$, saadaan $|f(x)-f(3)| = \left|\frac{x}{x-1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2x-3(x-1)}{2(x-1)}\right| = \left|\frac{-x+3}{2(x-1)}\right|$

$$= \frac{\overbrace{|-x+3|}^{-(x-3)}}{2\underbrace{|x-1|}_{>0,\ x-1}} = \frac{\overbrace{|x-3|}^{\text{HYVÄ}}}{\underbrace{2x-2}_{\text{pitää vielä arvioida}}} \qquad \circledast$$

3)

Koska voimme valita luvun $\delta > 0$ kuten haluamme, voimme vaatia, että $\delta \le 1$. Jos nyt $|x-3| < \delta \le 1$, jolloin $-1 < x-3 < 1$.

Erityisesti $2 \le x \quad (\le 4)$, joten $2x-2 \ge 2*2-2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2x-2} \le \frac{1}{2}$.

Arviosta $\circledast$ saadaan, että

$$|f(x)-f(3)| = \frac{|x-3|}{2x-2} \le \frac{|x-3|}{2}.$$

Nyt voidaan valita $\delta = \min(1, 2\epsilon)$, jolloin ehdosta $|x-3| < \delta$ saadaan, että

$$|f(x)-f(3)| \le \frac{|x-3|}{2} < \frac{\delta}{2} \le \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

4)

Siispä f on jatkuva pisteessä $x = 3$.

c)

Osoita, että $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ f(x) = x^2$, on jatkuva (eli jatkuva kaikissa pisteissä $a \in \mathbb{R}$).

Ratkaisu:

1)

Olkoon nyt $a \in \mathbb{R}$ mikä tahansa ja olkoon $\epsilon > 0$.

2)

Kun $x \in \mathbb{R}$, saadaan $|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |(x-a)(x+a)| = \underbrace{|x-a|}_{\text{HYVÄ}}\underbrace{|x+a|}_{\text{tätä pitää vielä arvioida}}$.

Nyt $|x+a| = |\underbrace{x-a+2a}_{=+a}| \overset{\Delta\text{-ey}}{\le} \underbrace{|x-a|}_{\le 1,\ \text{jos } |x-a|<\delta\le 1} + 2|a|$,

joten jos $\delta \le 1\ \ ja\ \ |x-a| < \delta$, saadaan

$$|f(x)-f(a)| = |x-a|\underbrace{|x+a|}_{\le 1+2|a|} \le |x-a|(1+2|a|).$$

3)

Jos siis valitaan $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right)$, saadaan ehdosta $|x-a| < \delta$, että

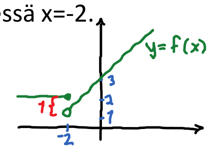
$$|f(x)-f(a)| \le \underbrace{|x-a|}_{<\delta}(1+2|a|) < \delta(1+2|a|) \le \frac{\epsilon}{1+2|a|} * (1+2|a|) = \epsilon$$

4)

Siispä f on jatkuva jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}$, eli f on jatkuva. Ok.

d)

Osoita, että funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le -2 \\ x+3, & x > -2 \end{cases}$ on epäjatkuva pisteessä x=-2.



Osoittaminen epäjatkuvaksi:

1)

Valitse $\epsilon > 0$, joka on (esimerkiksi) pienempi kuin funktion "hyppäys" tai heilahtelu kohdassa x = a.

2)

Otetaan $\delta > 0$ (mikä tahansa).

3)

Etsi piste $x \in A$, jolle pätee $|x-a| < \delta$, mutta silti $|f(x)-f(a)| \ge \epsilon$.

4)

Tällöin f ei ole jatkuva pisteessä a.

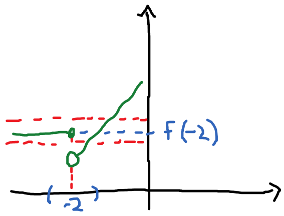
Ratkaisu:

1)

Valitaan $\epsilon = \frac{1}{2}$.

2)

Olkoon nyt $\delta > 0$ mikä tahansa.



3)

Jos $\delta > 1$, niin valitaan
$x = -2 + \frac{1}{2}$, jolloin
$|x-(-2)| = |x+2| = \frac{1}{2} < \delta$, mutta $|\underbrace{f(x)}_{x+1} - \underbrace{f(-2)}_{2}| = |\underbrace{x}_{-2+\frac{1}{2}} + 1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \geq \epsilon$

Jos taas $\delta \leq 1$, niin valitaan $x = -2 + \frac{\delta}{2}$, jolloin $|x-(-2)| = \left|-2 + \frac{\delta}{2} + 2\right| < \delta$,
mutta

$$|f(x) - f(-2)| = |x+1| = \left|-1 + \frac{\delta}{2}\right| = 1 - \frac{\delta}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \epsilon$$

4)

Kaikille $\delta > 0$ löydetään $x \in \mathbb{R}$, jolle pätee $|x-(-2)| < \delta$, mutta $|f(x) - f(-2)| \geq \epsilon$, joten f ei ole jatkuva -2:ssa.

e)

Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ja olkoon $a \in \mathbb{R}$.
Osoitetaan, että f on epäjatkuva jokaisessa pisteessä $a \in \mathbb{R}$:

1)

Valitaan $\epsilon = 1$.

2)

Olkoon $\delta > 0$ mikä tahansa.

3)

Jos $a \in \mathbb{Q}$, niin valitaan $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ jolle pätee
$a < x < a + \delta$ (onnistuu, koska $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ on tiheä, JRF lause 1.3)
Tällöin $0 < x - a < \delta$ joten $|x - a| < \delta$, mutta silti
$|f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1 \geq \epsilon$,
joten f on epäjatkuva a:ssa.

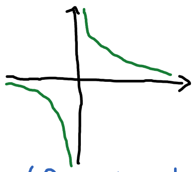
Tapaus, jossa a on irrationaalinen käsitellään vastaavasti kuin tapaus, jossa a on rationaalinen.

Määritelmä

Funktio $f: A \to \mathbb{R}$ on rajoitettu joukossa A, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $\underbrace{|f(x)| \leq M}_{\Leftrightarrow\ -M \leq f(x) \leq M}$ kaikille $x \in A$.

Esim.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$\left(f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M \Leftrightarrow x < \frac{1}{M} \right)$

ei ole rajoitettu.

Perustelu:

Olkoon M > 0.

Valitaan $x = \frac{1}{2M} > 0$.

Tällöin

$$f(x) = \frac{1}{x} = 2M > M,$$

joten erityisesti

$$|f(x)| > M.$$

Mikään M > 0 ei siis kelpaa ylärajaksi, joten f ei ole rajoitettu.

Lause 1.1.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f: A \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $a \in A$.
Tällöin f on rajoitettu pisteen a lähellä, ts. on olemassa $M > 0$ *ja* $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x)| \leq M \text{ aina kun } x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta.$$

Todistus

Valitaan $\epsilon = 1$. Koska f on jatkuva a:ssa, niin on siis olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon\ (= 1),$$

aina kun

$$x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta.$$

Mutta tällöin

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \overset{\Delta ey}{\leq} \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{<1} + |f(a)|$$

$$< \overbrace{1 + |f(a)|}^{=M}$$

aina, kun

$$x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta.$$

Eli ehto

$$|f(x)| \leq M$$

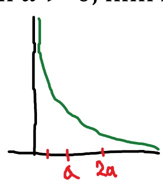
pätee kun valitaan

$$M = 1 + |f(a)|.$$

Ok.

Huom.

Funktio $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva (HT, Harj. 2), mutta se ei ole rajoitettu lähtöjoukossaan $]0, \infty[$ (nähdään kuten edellisessä esimerkissä). Jos kuitenkin $a > 0$, niin f on kuitenkin rajoitettu esimerkiksi välillä $]\frac{a}{2}, 2a[$. (tai myös välillä $]\frac{a}{2}, \infty[$).



Funktio-operaatiot ja jatkuvuus

Jatkuvien funktioiden summat ja tulot ovat jatkuvia:

Lause 1.2.

> Olkoot $f, g: A \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $a \in A$.
> Tällöin a:ssa ovat jatkuvia myös funktiot
>
> *a)*
>
> $f + g \qquad \big((f+g)(x) = f(x) + g(x)\big)$
>
> *b)*
>
> fg
>
> *c)*
>
> $cf, \qquad missä\ c \in \mathbb{R}.$

Todistus

a)

Olkoon $\epsilon > 0$.

Nyt

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| = |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)|$$

$$= \big|\big(f(x) - f(a)\big) + \big(g(x) - g(a)\big)\big| \overset{\Delta ey}{\leq} |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|.$$

Koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

aina, kun

$$x \in A\ ja\ |x - a| < \delta_1.$$

(Tässä siis käytetään jatkuvuuden määritelmää positiiviselle luvulle $\frac{\epsilon}{2}$.)

Vastaavasti on olemassa $\delta_2 > 0$ siten, että

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

aina, kun

$$x \in A\ ja\ |x - a| < \delta_2.$$

Valitaan nyt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Jos nyt $x \in A\ ja\ |x - a| < \delta$, niin erityisesti

$$|x - a| < \delta_1\ ja\ |x - a| < \delta_2,$$

joten tällöin

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Siispä f+g on jatkuva a:ssa.

Ok.

b)

Olkoon $\epsilon > 0$.

Nyt

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| = |f(x)g(x) - f(a)g(a)|$$

halutaan |f(x)-f(a)| näkyviin

$$= |f(x)g(x) \underbrace{- f(a)g(x) + f(a)g(x)}_{0} - f(a)g(a)|$$

$$\overset{\Delta ey}{\leq} \underbrace{|f(x) - f(a)||g(x)|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f(a)||g(x) - g(a)|}_{\circledast < \frac{\epsilon}{2}}$$

Halutaan!

Koska g on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|g(x)-g(a)| \le \frac{\epsilon}{2(|f(a)|\underbrace{+1}_{})}$$

(lisätään 1, jos sattuisi olemaan $f(a)=0$)

aina kun $x \in A\ ja\ |x-a| < \delta_1$.
(⇒ Ok.)

Lemman 1.1. nojalla on olemassa $M > 0\ ja\ \delta_2 > 0$ siten, että

$$|g(x)| \le M$$

aina kun

$$x \in A\ ja\ |x-a| < \delta_2 \text{ (koska g on jatkuva a:ssa).}$$

Tällöin siis

$$|f(x)-f(a)||g(x)| \le |f(x)-f(a)| * M.$$

Mutta koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta_3 > 0$ siten, että

$$|f(x)-f(a)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

aina kun

$$x \in A\ ja\ |x-a| < \delta_3.$$

Valitaan nyt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Tällöin edellä tehdyt arviot ovat voimassa aina kun $x \in A\ ja\ |x-a| < \delta$, joten näille x saadaan

$$|(fg)(x)-(fg)(a)| \le \underbrace{|f(x)-f(a)|}_{<\frac{\epsilon}{2M}}\underbrace{|g(x)|}_{\le M} + |f(a)|\underbrace{|g(x)-g(a)|}_{<\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{|f(a)|+1}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} * \underbrace{\frac{|f(a)|}{|f(a)|+1}}_{<1} < \epsilon.$$

Ok.

Siispä fg on jatkuva a:ssa.

c)

Seuraa b)-kohdasta, koska vakiofunktio $g(x) = c$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ on jatkuva (HT, Harj. 1).

Lauseesta 1.2 saadaan tärkeä seuraus:

Seuraus 1.3.

Kaikki polynomit $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia.

Todistus

Olkoon $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o$, missä $n \in \mathbb{N}\ ja\ a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k = 1,2,\dots,n$.
Koska funktio $f(x) = x$ on jatkuva (HT, Harj. 1) on myös funktio $x \mapsto x^k = (f(x))^k$ on jatkuva kaikille $k = 1,2,\dots,n$ $(L. 1.2. b)$.
Tällöin myös funktiot $x \mapsto a_k x^k$ ovat jatkuvia (L.1.2.c), ja niinpä myös näiden summa p on jatkuva.
Ok.

Lause 1.4.

(Yhdistetyn funktion jatkuvuus)

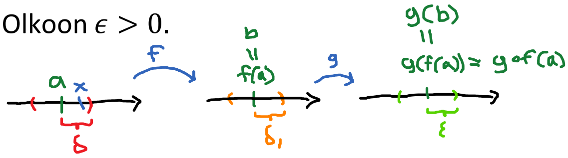
Olkoot $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \subset \mathbb{R}\ ja\ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\ ja\ \boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ funktioita.
Oletetaan, että **f** on jatkuva pisteessä $a \in A$ ja että **g** on jatkuva pisteessä $f(a) \in B$.
Tällöin yhdistetty funktio

$$g \circ f: A \to C$$

on jatkuva pisteessä $\boldsymbol{a}$.

Todistus

Olkoon $\epsilon > 0$.



⊛ Merkitään $f(a) = b$. Koska g on jatkuva b:ssä, on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ aina kun $y \in B$ ja $|y - b| < \delta_1$.

Toisaalta, koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1$$

aina kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta$.
(Tässä käytettiin siis jatkuvuuden määritelmässä "epsilonina" lukua $\delta_1 > 0$.)

Olkoon nyt $x \in A$ siten, että $|x - a| < \delta$.
Tällöin siis $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.
Jos merkitään $f(x) = y$, niin nyt siis $|y - b| < \delta_1$ $(ja\ y \in B)$, joten ⊛:n nojalla $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ eli

$$|\underbrace{g(f(x))}_{g\circ f(x)} - \underbrace{g(f(a))}_{g\circ f(a)}| < \epsilon.$$

Siispä $g \circ f$ on jatkuva a:ssa.
Ok.

Lauseen 1.4. avulla voidaan todeta esimerkiksi kahden jatkuvan funktion osamäärä jatkuvaksi. Tätä varten tarvitaan myös seuraava aputulos:

Lemma 1.5.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $a \in A$.
Jos

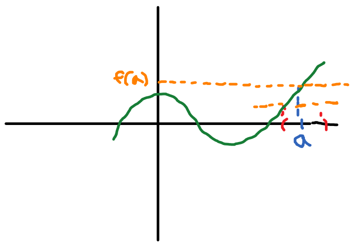
$$f(a) > 0$$
$$(tai\ f(a) < 0)$$

niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > \frac{1}{2} f(a) > 0$$
$$\left(tai\ f(x) < \frac{1}{2} f(a) < 0\right)$$

kaikille $x \in A$, joille

$$|x - a| < \delta.$$



Todistus

Olkoon aluksi $f(a) > 0$.
Valitaan $\epsilon = \frac{1}{2} f(a) > 0$.
Koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a) < \epsilon = \frac{1}{2} f(a)$$

aina kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta$. Mutta tällöin

$$\underbrace{-\frac{1}{2} f(a) < f(x) - f(a)}_{} < \frac{1}{2} f(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f(a) < f(x),$$

kuten haluttiinkin.

Jos taas $f(a) < 0$, niin voidaan soveltaa jo todistettua tapausta funktioon $-f$, jolloin saadaan $\delta > 0$ siten, että

$$-f(x) > -\frac{1}{2}f(a) > 0$$

aina kun $x \in A\ ja\ |x-a| < \delta$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{1}{2}f(a) < 0.$$

Ok.

Lause 1.6.

Olkoot $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$.
Tällöin myös seuraavat funktiot ovat jatkuvia a:ssa:

a)

$$\frac{f}{g} \qquad \left(\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right) \ kunhan\ g(a) \neq 0$$

b)

$$|f| \qquad (|f|(x) = |f(x)|)$$

c)

$$\max(f,g), \min(f,g).$$

Todistus

a)

Merkitään $h: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$.
Tällöin h on jatkuva (Harj. 2).
Jos $g(a) \neq 0$, niin Lemman 1.5. nojalla on olemasa $\delta > 0$ siten, että $g(x) \neq 0$ aina kun $x \in A\ ja\ |x-a| < \delta$.
Tällöin $(h \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)}$ on määritelty kaikille $x \in A$ joille $|x-a| < \delta$. Koska g on jatkuva a:ssa ja h on jatkuva g(a):ssa, niin Lauseen 1.4. perusteella myös yhdistetty funktio $(h \circ g)(x) = \frac{1}{g}$ on jatkuva a:ssa. Mutta koska myös f on jatkuva a:ssa, on Lauseen 1.2.b. nojalla myös $\frac{f}{g} = f * \frac{1}{g}$ jatkuva a:ssa. Ok.

b)

Funktio $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = |x|$, on jatkuva (HT, Harj. 1).
Siispä myös yhdistetty funktio $(h \circ f)(x) = |f(x)|$ on jatkuva a:ssa.

c)

Muistetaan, että

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \quad (JRF, Lause\ 1.11.).$$

Koska f ja g ovat jatkuvia a:ssa, niin myös funktiot

$$h_1(x) = f(x) + g(x)$$

ja

$$h_2(x) = f(x) - g(x)$$

ovat jatkuvia a:ssa (L.1.2.), ja edelleen $|h_2(x)|$ on jatkuva b)-kohdan nojalla. Näin ollen myös

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(h_1(x) + |h_2(x)|)$$

on jatkuva L.1.2. perusteella.
Ok.

Seuraus 1.7.

Kaikki rationaalifunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan,
ts. jos

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat polynomeja, niin edelleen f on jatkuva joukossa

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$
missä $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat polynomeja, niin edelleen f on jatkuva joukossa
$$A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Todistus

Polynomit ovat jatkuvia (Seuraus 1.3.) joten L.1.6.a perusteella polynomien osamäärä on jatkuva aina kun se on määritelty, eli kun nimittäjä $\neq 0$.
Ok.

Esim.

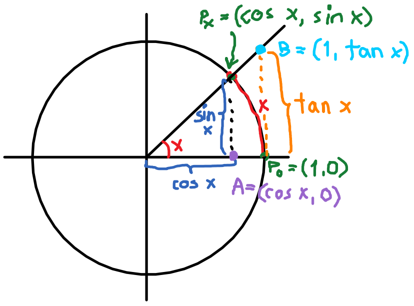
Funktio $f(x) = \frac{5x^4 - 18x + \sqrt{41}}{x^2 - 4}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi trigonometristen funktioiden jatkuvuutta. Perustaksi tarvitaan seuraava aputulos:

Lemma 1.8.

Kun $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, niin
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}.$$

Todistus



Kuvan kolmioiden pinta-aloille pätee

$$\circledast \begin{cases} Ala(\triangle OAP_x) < Ala(\triangle OP_0P_x) \\ < Ala(S_x) < Ala(\triangle OP_0B), \quad (A = (\cos x, 0)) \end{cases}$$

missä S_x on kaarta P_0P_x vastaava yksikköympyrän S sektori.
Koska ympyrän S pinta-ala on $\pi * 1^2 = \pi$, ja ympyrän koko kehän pituus on 2π, on sektori S_x pinta-ala

$$Ala(S_x) = \underbrace{\frac{x}{2\pi}}_{\text{sektorin osuus koko ympyrästä}} * \underbrace{\pi}_{\text{koko ympyrän ala}} = \frac{x}{2}$$

Kun $Ala(S_x)$ ja kolmioiden pinta-alat sijoitetaan epäyhtälöön $\circledast$, saadaan

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{1}{2} * 1 * \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} * 1 * \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\Rightarrow \cos x \sin x < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Kun tämä jaetaan luvulla $\sin x > 0$, saadaan

$$\cos x < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Tässä kaikki luvut ovat positiivisia, joten voidaan ottaa käänteisluvut (jolloin epäyhtälöiden suunnat vaihtuvat) ja saadaan

$$\frac{1}{\cos x} > 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x\,.$$

Ok.

Lause 1.9.

Funktiot

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x\,,$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \cos x\,,$$
$$h\colon \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \tan x$$

ovat jatkuvia.

Todistus

Todistetaan ensin f:n jatkuvuus. Olkoon siis $a \in \mathbb{R}$ ja olkoon $\epsilon > 0$.
Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$\sin x - \sin a = 2 \sin\frac{x-a}{2} \cos\frac{x+a}{2}$$

(Harj. 2), joten

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \underbrace{\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|}_{\leq 1 \text{ (aina)}}$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.$$

Toisaalta Lemman 1.8. avulla nähdään, että

$$|\sin z| \leq |z| \quad kaikille\ z \in \mathbb{R}\colon$$

jos $z \in]0, \pi/2[$, niin

$$0 < \frac{\sin z}{z} < 1,$$

joten

$$|\sin z| < |z|.$$

jos $z \in]-\pi/2, 0[$, niin

$$0 < \frac{\sin -z}{-z} < 1, \qquad (koska\ -z \in]0, \frac{\pi}{2}[\square)$$

joten

$$|\sin z| = -\sin z < -z < |z|.$$

jos $z = 0$, niin

$$\sin z = 0 = z.$$

jos $|z| \geq \frac{\pi}{2}$, niin

$$|\sin z| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |z|.$$

Siispä

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2 * \frac{x-a}{2} = |x-a|.$$

Nyt voidaan valita $\delta = \epsilon$, ja saadaan, että

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a| < \delta = \epsilon$$

aina kun $x \in \mathbb{R}\ ja\ |x-a| < \delta$.
Siis f on jatkuva.
Ok.

Funktion

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

jatkuvuus seuraa Lauseesta 1.4. (koska $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ on jatkuva ja $f(x) = \sin x$ on jatkuva) ja funktion

$$h(x) = \tan x = \frac{f(x)}{g(x)}$$

jatkuvuus saadaan Lauseesta 1.6.
Ok.

Esim.

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x^5+3x^2-18)}{\cos^2 x+2}$ on jatkuva.

Perustelu
Funktiot

$$p_1(x) = x^5 + 3x^2 - 18 \text{ ja}$$
$$p_2(x) = x^2 + 2$$

ovat polynomeina jatkuvia. (Seuraus 1.3.)
Myös funktiot

$$g_1(x) = \sin x \text{ ja}$$
$$g_2(x) = \cos x$$

ovat jatkuvia (L.1.9.).
Tällöin yhdistetyt funktiot

$$g_1 \circ p_1 \text{ ja}$$
$$p_2 \circ g_2$$

ovat jatkuvia (L.1.4.).
Lisäksi

$$(p_2 \circ g_2)(x) = \cos^2 x + 2 \geq 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

joten osamäärä

$$f(x) = \frac{(g_1 \circ p_1)(x)}{(p_2 \circ g_2)(x)}$$

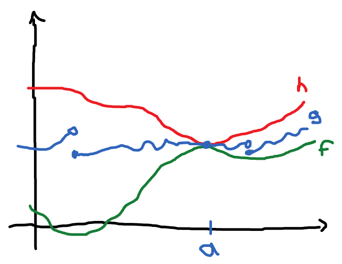
on määritelty kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja siten myös jatkuva (kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}$)(L.1.6.a).

Joskus funktion jatkuvuus on kätevä todeta seuraavan "suppiloperiaatteen" avulla:

Lause 1.10.

(Suppiloperiaate)

> Olkoot $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että
> $$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
> kaikille $x \in A$, ja että jollekin $a \in A$ pätee
> $$f(a) = g(a) = h(a).$$
> Jos **f** ja **h** ovat jatkuvia pisteessä **a**, niin myös **g** on jatkuva pisteessä **a**.



Todistus

Olkoon $\epsilon > 0$.
Koska h on jatkuva a:ssa, niin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|h(x) - h(a)| < \epsilon$$

aina kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta_1$. Mutta tällöin oletuksen nojalla

$$\underbrace{g(x)}_{\leq h(x)} - \underbrace{g(a)}_{= h(a)} \leq h(x) - h(a) \underset{\substack{\uparrow \\ c \leq |c| \;\; \forall c \in \mathbb{R}}}{\leq} |h(x) - h(a)| < \epsilon$$

aina kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta_1$.
Vastaavasti löydetään $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\underbrace{g(x)}_{\geq f(x)} - \underbrace{g(a)}_{= f(a)} \geq f(x) - f(a) \underset{\substack{\uparrow \\ c \geq -|c| \\ \forall c \in \mathbb{R}}}{\geq} -|f(x) - f(a)| > -\epsilon$$

aina kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta_2$.
Jos siis valitaan $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, niin kaikille $x \in A$ joille $|x - a| < \delta$ pätee, että

$$-\epsilon < g(x) - g(a) < \epsilon$$

eli

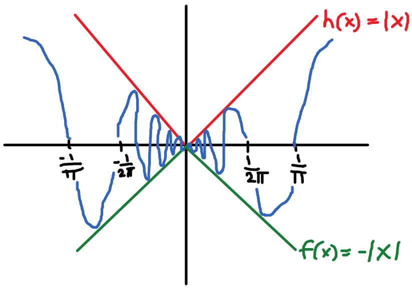
$$|g(x) - g(a) < \epsilon.$$

Siispä g on jatkuva a:ssa.
Ok.

Esim.

Funktio $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

on jatkuva (koko $\mathbb{R}$:ssä!)



Perustelu
Kun $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, niin funktiot

$x \mapsto \frac{1}{x}$,
$x \mapsto \sin x$, ja
$x \mapsto x$

ovat kaikki jatkuvia a:ssa, joten myös yhdistetty funktio
$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

ja tulo $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

ovat jatkuvia a:ssa (L.1.2. & L.1.4.).

Osoitetaan vielä jatkuvuus kun a = 0:
Valitaan

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ ja
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

Tällöin f ja h ovat jatkuvia $\mathbb{R}$:ssä (siis erityisesti kun a = 0).
Lisäksi

$$f(0) = g(0) = h(0) = 0$$

ja kaikille $x \neq 0$ pätee, että

$$|g(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|,$$

joten

$$f(x) = -|x| \leq g(x) \leq |x| = h(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
Suppiloperiaatteen nojalla myös g on jatkuva 0:ssa.
Ok.

Huom.

Muista, että funktio $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ei ole jatkuva nollassa (muualla kyllä on). Esimerkin funktio g tekee kyllä "yhtä monta" heilahdusta kuin f, mutta koska g:n heilahtelut vaimenevat kohti nollaa, saadaan g:stä jatkuva myös nollassa.

2. Optimaaliset ylä- ja alarajat eli supremum ja infimum

Esim.

Mikä on funktion

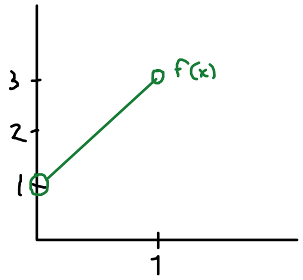
$$f:]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x + 1,$$

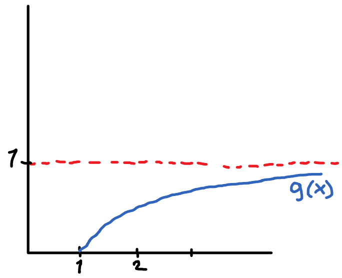
suurin arvo?

Entä funktion

$$g: [1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x} \quad \left(= 1 - \frac{1}{x}\right)$$

suurin arvo?





Vastaus:

Ei mikään, ts. suurinta arvoa ei ole olemassa kummallakaan funktiolla.
Molemmilla on kuitenkin optimaalinen yläraja, joka on f:llä 3
(erityisesti $f(x) \leq 3$ $kaikille$ $x \in]0,1[$)
ja g:llä 1 ($g(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ $kaikille$ $x \in [1, \infty[$).

Vastaava pätee $\mathbb{R}$:n osajoukoille:
Kun $A \subset \mathbb{R}$, niin aina A:ssa ei ole suurinta tai pienintä alkiota, mutta aina kun A on rajoitettu, on A:lla **optimaaliset** ylä- ja alarajat.

Lähdetään tutkimaan tätä asiaa tarkemmin:

Määritelmä

Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on

i)

ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikille $a \in A$ pätee $a \leq M$.
Tällöin M on joukon A **yläraja**.

ii)

alhaalta rajoitettu, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten, että kaikille $a \in A$ pätee $a \geq m$.
Tällöin m on joukon A **alaraja**.

iii)

rajoitettu, jos A on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu. Tällöin on siis olemassa $M, m \in \mathbb{R}$ siten, että $m \leq a \leq M$ kaikille $a \in A$, joten erityisesti $A \subset [m, M]$.

Esim.

a)

Joukko $A = [-1{,}5[$ on rajoitettu. A:n ylärajoja ovat esimerkiksi 5, 1000 ja 12 ja alarajoja esim. -18 ja -1.

b)

Joukko $A = \{2 - k^2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{2, 1, -2, -7, \dots\} \subset \mathbb{R}$ on ylhäältä rajoitettu: Jos $a \in A$, niin $a = 2 - k^2$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$, ja tällöin $a = 2 \underbrace{- k^2}_{\leq 0} \leq 2$. Siis 2 on (eräs) A:n yläraja.

A ei ole alhaalta rajoitettu: Jos $m \in \mathbb{R}$, niin valitaan $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $k > 2 - m$ (muista Arkhimedeen periaate, JRF). Tällöin

$$k^2 \geq k > 2 - m \Rightarrow m > \underbrace{2 - k^2}_{\in A},$$

joten m ei voi olla A:n alaraja. Siispä mikään $m \in \mathbb{R}$ ei voi olla A:n alaraja.

c)

Joukko $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ on rajoitettu:

Koska $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \;\; kaikille\; n \in \mathbb{N}.$$

Siispä 1 on A:n alaraja ja 2 on yläraja (myös esimerkiksi 0 on alaraja ja 7 on yläraja)

Huom.

Jos $M \in \mathbb{R}$ on joukon A yläraja ja

$$M' > M,$$

niin myös M' on A:n yläraja.

Vastaavasti jos m on alaraja ja $m' < m$, niin m' on myös alaraja.

Määritelmä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$.
Luku $\alpha \in \mathbb{R}$ on joukon A **suurin alkio**, jos $\alpha \in A$ ja α on A:n yläraja,
ts. kaikille $a \in A$ pätee $a \leq \alpha$. Tällöin merkitään

$$\alpha = \max A\,.$$

Vastaavasti $\beta \in \mathbb{R}$ on A:n pienin alkio, jos $\beta \in A$ ja β on A:n alaraja eli $\beta \leq a$ kaikille $a \in A$.
Merkitään

$$\beta = \min A\,.$$

Huom.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin

$$\alpha = \max A \iff \begin{cases} \alpha \in A \\ \text{kaikille } a \in A \text{ pätee, että} \\ a \leq \alpha. \text{ (eli } \alpha \text{ on A:n yläraja)} \end{cases}$$

$$\beta = \min A \iff \begin{cases} \beta \in A \\ \text{kaikille } a \in A \text{ pätee, että} \\ a \geq \beta \text{ (eli } \beta \text{ on A:n alaraja)} \end{cases}$$

Tärkeä huomio:

Kaikilla rajoitetuilla joukoilla $A \subset \mathbb{R}$ ei ole suurinta tai pienintä alkiota (eli maksimia tai minimiä).

Esim.

Olkoon $A = [0,1[\quad (= \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 1\})$.
Tällöin

$$\min A = 0$$

(koska $0 \in A$ ja kaikille $a \in A$ pätee, että $a \geq 0$),
mutta A:lla ei ole suurinta alkiota.

Perustelu
Tehdään antiteesi: A:lla onkin suurin alkio, merkitään $\max A = \alpha \in A$.

Koska $\alpha \in A$, niin $0 \leq \alpha < 1$. Valitaan nyt $a = \frac{\alpha+1}{2}$. Tällöin $0 \leq a = \underbrace{\frac{\alpha}{2}}_{<\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, joten $a \in A$.
Toisaalta $a = \frac{\alpha}{2} + \overbrace{\frac{1}{2}}^{>\frac{\alpha}{2}} > \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, joten α ei voikaan olla A:n suurin alkio (koska $a \in A$ on suurempi) $\lightning$ RR

Siispä A:ssa
ei ole suurinta alkiota. Erityisesti luku 1 ei voi olla A:n maksimi, koska $1 \notin A$. Luku 1 on kuitenkin joukon A paras mahdollinen (eli pienin) yläraja eli joukon A supremum.

Määritelmä

(sup & inf)

Olkoon $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

1)

Luku $M_0 \in \mathbb{R}$ on A:n **pienin yläraja** eli **supremum**, jos

a)

M_0 on A:n yläraja eli kaikille $a \in A$ pätee, että $a \leq M_0$

b)

M_0 on ylärajoista pienin, eli jos myös $M \in \mathbb{R}$ on A:n yläraja, niin $M \geq M_0$.

Tällöin merkitään $M_0 = \sup A$.

2)

Luku $m_0 \in \mathbb{R}$ on joukon A **suurin alaraja** eli **infinum**, jos

a)

m_0 on alaraja eli kaikille $a \in A$ pätee, $a \geq m_0$.

b)

m_0 on alarajoista suurin, eli jos myös $m \in \mathbb{R}$ on A:n alaraja, niin $m \leq m_0$.

Tällöin merkitään $m_0 = \inf A$.

Esim.

Olkoon $A = [0,1[$. Tällöin $\sup A = 1$ ja $\inf A = 0$.

Perustelu:

$\sup A = 1$:

a)

1 on A:n yläraja, koska kaikille $a \in A$ pätee, että $a < 1$ (joten erityisesti $a \leq 1$).

b)

1 on pienin yläraja: tehdään antiteesi, että A:lla olisikin yläraja $M \in \mathbb{R}$, jolle pätee $M < 1$.

Koska $\frac{1}{2} \in A$ ja M on yläraja, niin pitää olla $\frac{1}{2} \leq M$. Valitaan nyt $a = \frac{M+1}{2}$.

Tällöin $a = \overbrace{\frac{M}{2}}^{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{4} \geq 0$ *ja* $a = \overbrace{\frac{M}{2}}^{< \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, joten $a \in A$, mutta toisaalta (koska M<1)

$$a = \frac{M}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{> \frac{M}{2}} > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M,$$

joten M ei olekaan A:n yläraja (koska $a \in A$ *ja* $a > M$) ↯ RR

Siispä 1 on joukon A pienin yläraja

$\inf A = 0$:

a)

0 on A:n alaraja, koska kaikille $a \in A$ pätee, että $a \geq 0$.

b)

Jos m on A:n alaraja, niin täytyy olla $m \leq 0$ (koska $0 \in A$).

Siispä 0 on joukon suurin alaraja.

Huomaa, että esimerkin joukolle A saatiin, että $\inf A = \min A = 0$. Sama pätee yleisesti:

Lause 2.1.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Jos A:lla on suurin alkio $\max A$, niin $\sup A = \max A$. Vastaavasti, jos on olemassa $\min A$, niin $\inf A = \min A$.

Todistus

Oletetaan, että on olemassa $\max A$ ja merkitään $\max A = \alpha$. Tällöin

a)

α on A:n yläraja, koska $a \leq \alpha$ kaikille $a \in A$ (koska α on suurin alkio).

b)

Jos M on joukon A yläraja, niin $a \leq m$ kaikille $a \in A$. Koska $\alpha \in A$, niin erityisesti siis $\alpha \leq M$ eli α on A:n ylärajoista pienin.

Siispä $\sup A = \alpha = \max A$.
Väite $\inf A = \min A$ todistetaan vastaavasti (HT).
Ok.

Kurssilla JRF esiteltiin reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ perusominaisuudet:

A) Algebralliset ominaisuudet

(peruslaskusäännöt)

B) Järjestysominaisuudet

(vertailun "<" perussäännöt)

Näiden lisäksi joukolta $\mathbb{R}$ vaaditaan seuraava "täydellisyysominaisuus", joka antaa täsmällisen muotoilun sille, että "joukossa $\mathbb{R}$ ei ole reikiä":

C) Täydellisyysaksiooma

Jos $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ ja A on **ylhäältä rajoitettu**, niin on olemassa $\sup A \in \mathbb{R}$ (eli A:lla on pienin yläraja).

Huom.

a)

Täydellisyysaksioomasta (TA) seuraa, että jokaisella alhaalta rajoitetulla joukolla $B \subset \mathbb{R}, B \neq \emptyset$ on olemassa $\inf B \in \mathbb{R}$:

Tutkitaan joukkoa $A = \{-x : x \in B\}$. Tällöin A on ylhäältä rajoitettu, joten TA:n nojalla on olemassa $\sup A \in \mathbb{R}$ ja nyt voidaan osoittaa, että $\inf B = -\sup A$ (yksityiskohdat HT).

b)

Jos $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu, niin $\inf A \leq \sup A$. (HT)

c)

Jos $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ ja B on rajoitettu, niin $\inf A \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. (HT)

d)

Jos $\sup A \in A$, niin $\sup A = \max A$ (koska $\sup A$ on aina A:n yläraja).
Muista, että usein $\sup A \notin A$! (esim. jos A = [0,1[).

Täydellisyysaksiooman avulla voimme todistaa jo JRF-kurssilla käytetyn Arkhimedeen ominaisuuden:

Lause 2.2.

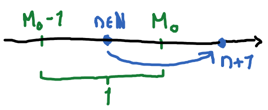
Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ jolle pätee, että $x < n$. Toisin sanoen, joukko $n \in \mathbb{N}$ ei ole ylhäältä rajoitettu.

Todistus

Tehdään antiteesi: on olemassa $M \in \mathbb{R}$, jolle pätee, että $n \leq M$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.
Tällöin $\mathbb{N}$ on siis ylhäältä rajoitettu ja lisäksi $\mathbb{N} \neq \emptyset$ (koska esim. $1 \in \mathbb{N}$).

TA:n nojalla on siis olemassa $M_0 = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Koska M_0 on $\mathbb{N}$ pienin yläraja, ei luku $M_0 - 1 < M_0$ voi olla $\mathbb{N}$: n yläraja. Siispä on olemassa $n \in \mathbb{N}$ jolle pätee, että $n > M_0 - 1$.



Mutta tällöin $n + 1 > M_0$ *ja* $n + 1 \in \mathbb{N}$ (koska $n \in \mathbb{N}$), joten M_0 ei olisikaan joukon $\mathbb{N}$ yläraja. ↯ RR

Siispä $N \subset \mathbb{R}$ ei ole ylhäältä rajoitettu.
Ok.

Luvuille $\sup A$ *ja* $\inf A$ saadaan myös seuraava "karakterisaatio" (määritelmän kanssa yhtäpitävä ehto):

Lause 2.3.

Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.
Tällöin

i)

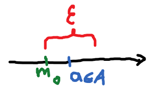
$M_0 = \sup A$ <=> **1)** M_0 on A:n yläraja
2) Kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a > M_0 - \epsilon$

ii)

$$a > M_0 - \epsilon$$

ii)

$m_0 = \inf A$ <=> **1)** m_0 on A:n alaraja
2) Kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että
$a < m_0 + \epsilon$



Todistus

i)

"=>"

Olkoon siis $M_0 = \sup A$. Tällöin M_0 on joukon A yläraja, joten ehto 1) toteutuu.
Olkoon sitten $\epsilon > 0$. Koska M_0 on joukon A pienin yläraja, ei luku $M_0 - \epsilon$ voi olla A:n yläraja (koska $M_0 - \epsilon < M_0$). Mutta tällöin joukosta A löytyy siis alkio $a \in A$ jolle pätee $a > M_0 - \epsilon$. Siispä ehto 2) on myös voimassa. Ok.

"<="

Oletetaan nyt, että ehdot 1) ja 2) toteutuvat. Tällöin M_0 on ainakin joukon A yläraja (ehto 1)), joten riittää osoittaa, että M_0 on pienin yläraja. Tehdään antiteesi, että joukolla A olisikin yläraja M siten, että $M < M_0$. Mutta tällöin voidaan valita $\epsilon = M_0 - M > 0$, jolloin ehdon 2) nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että

$$a > M_0 - \underbrace{\epsilon}_{=M_0-M} = M_0 - M_0 + M = M.$$

Siispä M ei voikaan olla A:n yläraja. ↯
Näin ollen M_0 on A:n pienin yläraja eli $\sup A = M_0$.
Ok.

ii)

Todistetaan aivan vastaavasti (mieti!). Ok.

Esim.

Olkoon $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.
Määritä $\sup A$ *ja* $\inf A$.

Ratkaisu:

Joukon A alkioita ovat ainakin $0, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$
Huomataan, että itse asiassa $\frac{3}{2} = \max A$: $\frac{3}{2} \in A$ $(kun\ n = 2)$ ja jos $n \geq 2$, niin $\overbrace{(-1)^n}^{\leq 1} + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$
$= \frac{3}{2}$,
ja kun n=1 saadaan, että $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + 1 = 0 \leq \frac{3}{2}$.
Siispä kaikille $a \in A$ pätee, että $a \leq \frac{3}{2}$, joten $\frac{3}{2}$ on A:n suurin alkio, ja Lauseen 2.1 nojalla

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}.$$

Osoitetaan, että $\inf A = -1$:

Tapa 1

(määritelmä)

1) -1 on A:n alaraja, sillä kun $n \in \mathbb{N}$, niin $\overbrace{(-1)^n}^{\geq 1} + \overbrace{\frac{1}{n}}^{>0} > -1 + 0 = -1$. Ok.

2) Osoitetaan, että -1 on A:n suurin alaraja: Tehdään antiteesi, että A:lla olisikin alaraja $m > -1$. Arkhimedeen ominaisuuden nojalla voidaan valita $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > \frac{1}{m+1}$, jolloin erityisesti

$$2n + 1 > n > \frac{1}{m + 1}$$

↑ (halutaan pariton luku)

(Halutaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että
$-1 + \frac{1}{n} < m$
$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < m + 1$
$\Leftrightarrow n > \frac{1}{m+1}$)

ja siten

$$m+1$$

(halutaan pariton luku)

$-1 + \frac{1}{n} < m$
$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < m+1$
$\Leftrightarrow n > \frac{1}{m+1}$

ja siten

$$\frac{1}{2n+1} < m+1. \quad (koska\ m+1 > 0)$$

Tällöin $(\text{-}1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \in A \quad (valitaan\ k = 2n+1 \in \mathbb{N})$

ja

$$\underbrace{(\text{-}1)^{2n+1}}_{=-1} + \frac{1}{2n+1} = -1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{<m+1} < \text{-}1 + m + 1 = m,$$

joten löytyi joukon A alkio joka on pienempi kuin m, ja siten m ei voikaan olla A:n alaraja. ↯

Näin ollen -1 on A:n suurin alaraja eli

$$\inf A = \text{-}1.$$

Tapa 2

(Lause 2.3.)

Osoitetaan, että -1 toteuttaa Lauseen 2.3.ii)-kohdan ehdot 1) ja 2).

1) -1 on alaraja (kuten edellä). Ok.

2) Olkoon $\epsilon > 0$. Pitää löytää $a \in A$ jolle pätee, että $a < \text{-}1 + \epsilon$ eli $k \in \mathbb{N}$, siten, että

$$(\text{-}1)^k + \frac{1}{k} < \text{-}1 + \epsilon.$$

Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > \frac{1}{\epsilon}$ (Arkhimedeen ominaisuus), ja merkitään $k > n > \frac{1}{\epsilon}$, joten $\frac{1}{k} < \epsilon$ ja lisäksi

$$\underbrace{(\text{-}1)^k}_{\substack{-1 \\ \text{(koska k pariton)}}} + \frac{1}{k} = \text{-}1 + \frac{1}{k} < \text{-}1 + \epsilon,$$

joten löytyi joukon A alkio $(\text{-}1)^k + \frac{1}{k} < \text{-}1 + \epsilon$ kuten haluttiinkin. Ok.

Siispä $\inf A = -1$.

3. Lukujonot

Lukujonot ja niiden raja-arvot kuuluvat analyysin keskeisimpiin käsitteisiin. Lukujonoja ovat esimerkiksi

$0,1,0,1,0,1,\ldots \left(x_n = \begin{cases} 0, jos\ n\ pariton \\ 1, jos\ n\ parillinen \end{cases} = \frac{1}{2} + (\text{-}1)^n * \frac{1}{2} \right)$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \quad \left(x_n = \frac{1}{n} \right)$

$6, \pi, -18, 5, \sqrt{2}, 0, \ldots\ (x_n\!: lle\ ei\ mitään\ selvää\ sääntöä)$

Tarkkaan ottaen lukujono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, missä $x_n \in \mathbb{R}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, on funktio $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jonka arvoille käytetään merkintöä $f(n) = x_n$.
Käytännössä lukujonolle $x_1, x_2, x_3, \ldots$ käytetään merkintöä (x_n) tai $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Esim.

a)

Kaava $x_n = \frac{n}{n+1}$ antaa lukujonon

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}, jne\ \ldots$$

b)

Kaavasta $x_n = \sin\left(n * \frac{\pi}{2}\right)$ saadaan lukujono

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, x_2 = \sin\pi = 0, x_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = \text{-}1, \ldots$$

ts. saadaan jono 1,0,-1,0,1,0,-1, …

c)

Asetetaan $x_n = \sum_{k=1}^{n} k$

Tällöin
$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 10, \dots$
ja induktiolla saadaan, että

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

d)

Lukujono voidaan antaa myös **rekursiivisesti** eli annetaan x_1 ja kerrotaan kuinka x_n saadaan kun tunnetaan edeltävät luvut $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.
Esimerkiksi jos $x_1 = 1\ ja\ x_n = \sqrt{x_{n-1}} + 1\ (kun\ n \geq 2)$, niin saadaan jono

$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{1} + 1 = 2, x_3 = \sqrt{2} + 1, x_4 = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + 1, \qquad jne \dots$

e)

Kohdan c) jono saadaan myös rekursiivisesti:

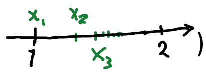
$$x_1 = 1\ ja\ x_n = x_{n-1} + n.$$

f)

(niin kuin Fibonacci): Asetetaan $x_1 = x_2 = 1\ \ ja\ \ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\ \ kun\ n \geq 3.$
Saadaan jono 1,1,2,3,5,8,13,21,…
jolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia.

Esimerkki 3.1.

Tutkitaan lukujonoa $x_n = \frac{2n}{n+1}$

(saadaan siis jono $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6} \ldots$ 

)

Näyttäisi siltä, että x_n "lähestyy lukua 2, kun n kasvaa". Luvulle a = 2 saadaankin, että

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

Jos siis esimerkiksi halutaan, että

$$|x_n - 2| < \frac{1}{10},$$

niin riittää, että

$$\frac{2}{n+1} < \frac{1}{10}$$

eli

$$n + 1 > 20 \ \ (<=> n > 19).$$

Siispä aina kun $n \geq 20$, niin pätee, että

$$|x_n - 2| < \frac{1}{10}.$$

Vastaavasti jos halutaan, että $|x_n - a| < \frac{1}{1000}$, niin riittää, että $n \geq 2000$, sillä tällöin

$$|x_n - 2| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{2001} < \frac{2}{2000} = \frac{1}{1000}.$$

Huomataan, että onpa $\epsilon > 0$ mikä tahansa, niin valitsemalla $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{2}{\epsilon}$ (valinta onnistuu Arkhimedeen ominaisuuden (L.2.2.) nojalla) pätee kaikille $n \geq N$ että

$$|x_n - 2| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1} < \frac{2}{N} < \frac{2}{\left(\frac{2}{\epsilon}\right)} = \epsilon.$$

Toisin sanoen, etäisyys $|x_n - 2|$ saadaan niin pieneksi kuin halutaan kunhan jonossa mennään tarpeeksi pitkälle.

Määritellään tämän havainnon pohjalta lukujonon suppeneminen:

Määritelmä

i)

Lukujono (x_n), missä $x_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, **suppenee** (eli **konvergoi**) kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \epsilon$ aina kun $n \geq N$.
Tällöin sanotaan, että luku a on jonon (x_n) **raja-arvo**, ja merkitään

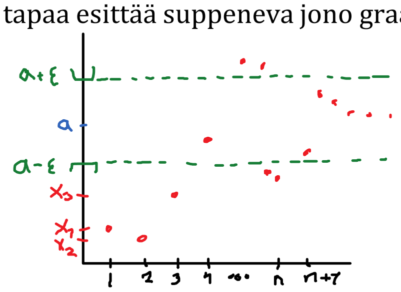
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

(tai $x_n \to a$ kun $n \to \infty$)

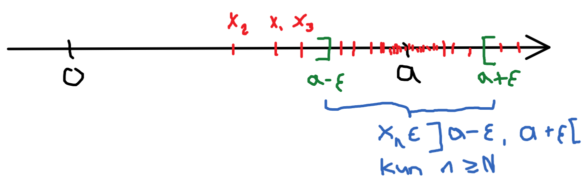
ii)

Jos lukujono (x_n) ei suppene (kohti mitään lukua $a \in \mathbb{R}$) sanotaan, että jono (x_n) **hajaantuu** (eli **divergoi**).

2 tapaa esittää suppeneva jono graafisesti:



TAI



Huom.

a)

Määritelmän luku N saa riippua luvusta $\epsilon > 0$, mutta ei n:stä (vrt. jatkuvuuden määritelmän luku $\delta > 0$)

b)

Ei riitä, että $|x_n - a| < \epsilon$ toteutuu jollekin $n \geq N$, vaan tämän pitää olla voimassa **kaikille** $n \geq N$.

c)

Määritelmää käytettäessä pitää jo tietää (tai arvata) mikä jonon (x_n) raja-arvo on. Tämän jälkeen perustelu etenee seuraavien vaiheiden mukaan (vrt. jatkuvuus!)

1)

Otetaan $\epsilon > 0$.

2)

Arvioidaan itseisarvoa $|x_n - a|$

3)

Valitaan $N \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $|x_n - a| < \epsilon$ aina kun $n \geq N$.

4)

Jos N:n valinta onnistuu kaikille $\epsilon > 0$, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

Esimerkki 3.2.

a)

Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Perustelu:

Olkoot $\epsilon > 0$. Nyt siis $x_n = \frac{1}{n}$ $ja\ a = 0$, joten

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Nyt

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad <=> \ n > \frac{1}{\epsilon},$$

joten kun valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{1}{\epsilon}$ $(L. 2.2.!)$ saadaan kaikille $n \geq N$, että

$$|x_n - a| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad (\text{koska } N > \tfrac{1}{\epsilon})$$

Ok.

b)

Esimerkin 3.1. jonolle $x_n = \frac{2n}{n+1}$ pätee, että $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ (sillä kun $\epsilon > 0$, niin voitiin valita $N > \frac{2}{\epsilon}$.)

c)

Olkoon $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jos } n \text{ on pariton} \\ \frac{120}{n}, & \text{jos } n \text{ on parillinen} \end{cases}$

jolloin saadaan jono

$$1, 60, \frac{1}{3}, 30, \frac{1}{5}, 20, \frac{1}{7}, 15, \frac{1}{9}, 12, \ldots$$

Tälle pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(Perustelut HT).

d)

Osoitetaan, että jono $x_n = \frac{1+2n}{4+3n}$ suppenee.

Perustelu:

Koska

$$x_n = \frac{1+2n}{4+3n} = \frac{n\left(\frac{1}{n} + 2\right)}{n\left(\frac{4}{n} + 3\right)} = \frac{\frac{1}{n} + 2}{\frac{4}{n} + 3},$$

voisi arvata, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}.$$

Perustellaan, että näin todella on:
Olkoon $\epsilon > 0$.
Nyt
$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{1+2n}{4+3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3+\cancel{6n}-8-\cancel{6n}}{12+9n}\right| = \left|\frac{-5}{12+9n}\right| = \frac{5}{12+9n},$$
joten riittää, että
$$\frac{5}{12+9n} < \epsilon.$$

TAPA 1:
(ratkaistaan suoraan)
$$\frac{5}{12+9n} < \epsilon \;<=>\; \frac{5}{\epsilon} < 12+9n \;<=>\; \ldots \;<=>\; n > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\epsilon} - 12\right).$$

Jos siis valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\epsilon} - 12\right)$, niin kaikille $n \geq N$ pätee, että
$$n \geq N > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\epsilon} - 12\right),$$
jolloin siis
$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{12+9n} < \epsilon.$$
Ok.

TAPA 2:
(arvioidaan ensin lisää)
Huomataan, että $12 + 9n > 9n > n$ kun $n \in \mathbb{N}$, joten $\frac{5}{12+9n} < \frac{5}{n}$.
Siispä riittää, että
$$\frac{5}{n} < \epsilon$$
eli
$$n > \frac{5}{\epsilon},$$
joten voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{5}{\epsilon}$, ja tällöin $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$ aina, kun $n \geq N$.

d)
(lyhyesti)
$x_n = \frac{1+2n}{4+3n}$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{5}{\epsilon}$. Tällöin kaikille $n \geq N$ pätee
$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \cdots = \frac{5}{12+9n} < \frac{5}{9n} \leq \frac{5}{n} \leq \frac{5}{N} < \frac{5}{\frac{5}{\epsilon}} = \epsilon.$$
Siispä $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

e)
Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Perustelu:
Olkoon $\epsilon > 0$. Kun $n \in \mathbb{N}$, niin $|x_n - 0| = \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \overset{\text{muista peruskikka}}{=} \left|\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(n+1)-n}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{>\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
$$< \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(Tässä käytettiin tietoa, että neliöjuuri on aidosti kasvava, vrt. JRF)
Nyt riittää, että $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$ eli että $\sqrt{n} > \frac{1}{2\epsilon}$ eli $n > \frac{1}{4\epsilon^2}$.
Valitaan siis $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N > \frac{1}{4\epsilon^2}$ (onnistuu, L.2.2.) ja tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että
$$\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > \sqrt{\frac{1}{4\epsilon^2}} = \frac{1}{2\epsilon},$$
ja siten
$$|x_n - 0| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2 * \frac{1}{2\epsilon}} = \epsilon.$$

Ok.

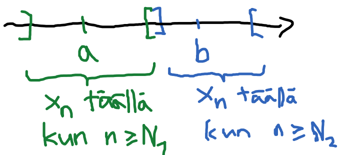
Osoitetaan seuraavaksi, että lukujonolla voi olla korkeintaan yksi raja-arvo:

Lause 3.3.

> Suppenevan jonon (x_n) raja-arvo on yksikäsitteinen, ts. jos
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$$
> ja
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = b \in \mathbb{R},$$
> niin $a = b$.

Todistus

Tehdään antiteesi: Onkin $a \neq b$.



Tällöin $|a - b| > 0$, joten voidaan valita $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ *siten, että* $|x_n - a| < \epsilon$ *kun* $n \geq N_1$.
Toisaalta $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, joten on olemassa $N_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - b| < \epsilon$ *kun* $n \geq N_2$.
Valitaan nyt $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Tällöin luvulle x_N pätee, että $|x_N - a| < \epsilon$ *ja* $|x_N - b| < \epsilon$, (*koska* $N \geq N_1$ *ja* $N \geq N_2$) mistä seuraa, että

$$|a - b| = |a - x_N + x_N - b| \overset{\Delta ey}{\leq} \underbrace{|a - x_N|}_{|x_N - a| < \epsilon} + \underbrace{|x_N - b|}_{< \epsilon} < 2\epsilon = 2 * \frac{|a - b|}{2}$$

eli

$$|a - b| < |a - b|,$$

mikä on ristiriita. ↯
Siispä a=b. Ok.

Määritelmä

Lukujono (x_n) on rajoitettu, jos joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.

Huom.

(x_n) on rajoitettu <=> on olemassa $M > 0$ siten, että $\underbrace{|x_n| \leq M}_{-M \leq x_n \leq M}$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

(HT/mieti!)

Esim.

a)

Jos $x_n = \frac{5-2n}{3n}$, niin jono (x_n) on rajoitettu, sillä

$$|x_n| = \left|\frac{5 - 2n}{3n}\right| = \frac{|5 - 2n|}{3n} \underset{\Delta ey}{\leq} \frac{5 + 2n}{3n} = \underbrace{\frac{5}{3n}}_{\leq \frac{5}{3}\ (\text{koska } n \geq 1)} + \frac{2n}{3n} \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

(voidaan siis valita $M = \frac{7}{3}$).

b)

Jono $x_n = (\text{-}1)^n + \frac{1}{n}$ on rajoitettu, sillä

$$|x_n| = \left|(\text{-}1)^n + \frac{1}{n}\right| \underset{\Delta ey}{\leq} |(\text{-}1)^n| + \left|\frac{1}{n}\right| \leq 2 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

(Huom. (x_n) ei suppene, HT.)

c)

Jono $x_n = \sqrt{3n}$ ei ole rajoitettu.
Antiteesi: Onpas, ts. on olemassa $M > 0$ siten, että $|x_n| \leq M <=> \sqrt{3n} \leq M$.
Jos kuitenkin valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > \frac{M^2}{2}$, niin

$$\sqrt{3n} \underset{(\sqrt{\ } \text{ aid. kasvava})}{>} \sqrt{3 * \frac{M^2}{3}} = \sqrt{M^2} \underset{M>0}{=} M,$$

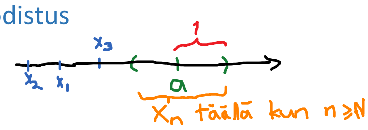
mikä on ristiriita. Siispä jono ei ole rajoitettu.

Suppeneva jono on aina rajoitettu:

Lause 3.4.

> Oletetaan, että jono (x_n) suppenee.
> Tällöin on olemassa $M > 0$ siten, että
> $$|x_n| \leq M \; kaikille \; n \in \mathbb{N},$$
> ts. (x_n) on rajoitettu.

Todistus



Olkoon $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Valitaan $\epsilon = 1$. Tällöin on siis $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < 1$ aina, kun $n \geq N$, joten erityisesti

$$|x_n| = |x_n - a + a| \overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} \underbrace{|x_n - a|}_{<1} + |a| < |a| + 1 \;\; kun \; n \geq N.$$

Valitaan nyt $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{n-1}|, |a| + 1)$. (maksimi on olemassa, koska tässä on äärellinen määrä lukuja). Tällöin $|x_n| \leq M \; kaikilla \; n \in \mathbb{N}$.
Ok.

Huom.

Kuten edellinen lause osoittaa, ei jonon "alkupää" vaikuta jonon rajoittuneisuuteen (tai myöskään suppenemiseen). Esimerkiksi jono

$$x_n = \begin{cases} n^n, & \text{kun } n \leq 10^6 \\ \frac{1}{n}, & \text{kun } n > 10^6 \end{cases}$$

on rajoitettu ja suppeneva: Kun $\epsilon > 0$, niin valitaan $N > 10^6 + \frac{1}{\epsilon}$, ja tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että

$$|x_n - 0| = \underset{n \geq N > 10^6}{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \epsilon,$$

joten $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Seuraavien raja-arvojen laskusääntöjen avulla monien raja-arvojen määrittäminen helpottuu:

Lause 3.5.

> Olkoot (x_n) ja (y_n) suppenevia lukujonoja ja
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R},$$
> $$\lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}.$$
> Tällöin
> a)
> $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \quad \left(= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$
> b)
> $$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$$
> c)
> $$\lim_{n\to\infty} (c x_n) = ca \;\; kaikille \; c \in \mathbb{R}$$
> d)
> jos $y_n \neq 0$, kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $b \neq 0$, niin
> $$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

d)

jos $y_n \neq 0$, kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $b \neq 0$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Erityisesti siis jonot $(x_n + y_n), (x_n y_n), (cx_n)$ ja $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ suppenevat.

Todistus

a)

Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt $|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x_n - a| + |y_n - b|$

Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ kun $n \geq N_1$ (käytetään määritelmässä "epsilonina" lukua $\frac{\epsilon}{2} > 0$). Vastaavasti koska $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, niin on $N_2 \in \mathbb{N}$ $s.e.$ $|y_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$ kun $n \geq N_2$. Valitaan nyt $N = \max(N_1, N_2)$ (huom: myös $N = N_1 + N_2$ kelpaa).

Tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että $|(x_n + y_n) - (a+b)| \leq \underbrace{|x_n - a|}_{<\frac{\epsilon}{2}\ (\text{koska } n \geq N_1)} + \underbrace{|y_n - b|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

Ok.

b)

HT (Harj. 4). Vertaa L.1.2.b:n todistukseen.
(Lausetta 3.4 tarvitaan myös.)

c)

Seuraa b-kohdasta kun valitaan $y_n = c$ $kaikille$ $n \in \mathbb{N}$ (jolloin tietysti $\lim_{n\to\infty} y_n = c$)

d)

Riittää osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$, sillä tällöin väite seuraa b-kohdasta ($\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n * \frac{1}{y_n} = a * \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$ todistetaan vastaavasti kun funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ jatkuvuus (Harj. 2), yksityiskohdat (HT).

Ok.

Esim.

a)

Olkoon $x_n = \frac{2n^3 + 2n^2 - 3n + 4}{5n^3 - 8}$. Määritä $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ratkaisu:

Huomataan ensin, että $x_n = \frac{n^3\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(5 - \frac{8}{n^3}\right)} \overset{n \neq 0}{=} \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{5 - 8n^3}$

Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Esim. 3.2.a) (ja $\lim_{n\to\infty} c = c$ $kaikille$ $c \in \mathbb{R}$), niin Lauseen 3.5 avulla saadaan, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{3.5.d}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{8}{n^3}\right)} \overset{3.5.a,b}{=} \frac{2 + 2\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0} - 3\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}_{=0} + 4\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}_{=0}}{5 - 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{5}$$

(koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0} = 0$ ja vastaavasti $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$)

Siispä $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{5}$.

Huomaa, että Lausetta 3.5 voidaan käyttää, koska kaikki tarkasteltavat raja-arvot ovat olemassa.

b)

Määritä $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right)$.

(Huom. ei voi tehdä näin: $\lim_{n\to\infty}(\dots) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \dots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0$, koska termien määrä riippuu n:stä!)

Ratkaisu:

Muistetaan, että $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(Induktio)$.

Siten $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} * \frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} \overset{L.3.5}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2} = \frac{1}{2}$.

Myös jonoille pätee suppiloperiaate:

Lause 3.6.

(Jonojen suppiloperiaate)

> Olkoot $(x_n), (y_n), (z_n)$ lukujonoja siten, että $x_n \leq y_n \leq x_n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jos
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n ,$$
> niin myös
> $$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Esim.

Olkoon $y_n = \frac{\cos n}{n}$. Tällöin

$$\underbrace{\frac{-1}{n}}_{=x_n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{z_n},$$

ja koska

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n},$$

niin suppiloperiaatteen nojalla myös

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Huom.

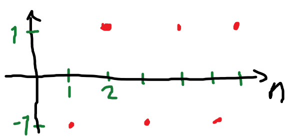
Pätee myös seuraava: Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad ja \;\; x_n \leq y_n \; kaikille \; n \in \mathbb{N}$, niin tällöin $a \leq b$ (HT).

Hajaantuvista jonoista

Muista, että jos lukujono (x_n) ei suppene (ts. sillä ei ole raja-arvoa $a \in \mathbb{R}$), niin jono (x_n) hajaantuu.

Esimerkki 3.7.

Jono $x_n = (-1)^n$ hajaantuu.



Antiteesi: Ei hajaannukaan,
jolloin on olemassa $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$.

Valitaan $\epsilon = 1$. Tällöin on siis olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \epsilon = 1$ aina kun $n \geq N$. Mutta jos $a < 0$, niin valitaan $n = 2N \geq N$, ja tällöin

$$|x_n - a| = |\underbrace{(-1)^{2N}}_{1} \underbrace{- a}_{>0}| = 1 - a \underset{\text{koska } a<0}{>} 1 \geq \epsilon \qquad ↯$$

Jos taas $a \geq 0$, niin valitaan $n = 2N + 1 \geq N$, ja tällöin

$$|x_n - a| = |\underbrace{(-1)^{2N+1}}_{=-1} - a| = |\underbrace{-1 - a}_{=-(1+a)}| = |\underbrace{1 + a}_{>0}| = 1 + a \geq 1 \qquad ↯$$

Siispä (x_n) hajaantuu.

Tärkeä erikoistapaus hajaantumisesta on hajaantuminen $\pm\infty$:ään:

Määritelmä

Lukujono (x_n) **hajaantuu äärettömään** (merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$) jos kaikille $M > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \geq M$ kaikille $n \geq N$.

Vastaavasti (x_n) **hajaantuu miinus äärettömään**, jos kaikille $m < 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \leq m$ kaikille $n \geq N$.

Esim.

Osoitetaan, että jono $x_n = \frac{n^3+n}{n+1}$ hajaantuu äärettömään:

Perustelu:

Olkoon $M > 0$. Halutaan siis, että $\frac{n^3+n}{n+1} \geq M$ aina kun $n \geq N$.

Nyt

$$\frac{n^3+n}{n+1} \overset{n>0}{>} \frac{n^3}{n+1} \overset{1\leq n}{\geq} \frac{n^3}{n+n} = \frac{n^3}{2n} = \frac{n^2}{2},$$

joten riittää, että

$$\frac{n^2}{2} \geq M \quad eli \quad n \geq \sqrt{2M}.$$

Valitaan siis $N \in \mathbb{N}$ siten, että $N \geq \sqrt{2M}$ ja tällöin kaikille $n \geq N$ pätee

$$x_n = \frac{n^3+n}{n+1} > \frac{n^2}{2} \geq \frac{N^2}{2} \geq \frac{\left(\sqrt{2M}\right)^2}{2} = \frac{2M}{2} = M.$$

Ok.

Seuraavaa epäyhtälöä tarvitsemme ainakin lukujonojen $x_n = c^n \;\; ja \;\; x_n = c^{\frac{1}{n}}$ tutkimisessa:

Lemma 3.8.

(Bernoullin epäyhtälö)

Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x >$ -1.
Tällöin

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Todistus

HT. (Induktio)

Esimerkki 3.9.

(Potenssijonot)

a)

Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja $x_n = c^n$.
Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{jos } -1 < c < 1 \\ 1, & \text{jos } c = 1 \\ \infty, & \text{jos } c > 1 \end{cases}$$

ja jos $c \leq$ -1, ei raja-arvoa ole (edes $\pm\infty$)

Perustelut:

1)

Jos $c = 0 \; tai \; c = 1$, on väite selvä.

2)

$0 < c < 1$: Tällöin $c = \frac{1}{1+b}$, missä $b > 0$

(itse asiassa $b = \underbrace{\frac{1}{c}}_{>1} - 1 > 1 - 1 = 0$)

Koska Bernoullin epäyhtälön nojalla $(1+b)^n \geq 1 + nb$, saadaan, että

$$|x_n - 0| = c^n = \left(\frac{1}{1+b}\right)^n = \frac{1}{(1+b)^n} \underset{(\text{Bernoulli})}{\leq} \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{nb}.$$

Kun $\epsilon > 0$, niin voidaan valita $N < \frac{1}{b\epsilon}$, ja tällöin kaikille $n \geq N$ pätee, että

$$|x_n - 0| < \frac{1}{nb} \underset{b>0}{\leq} \frac{1}{Nb} < \frac{1}{\frac{1}{b\epsilon} * b} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Siispä $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ok.

3)

-1 $< c < 0$: Nyt $0 < |c| < 1$, joten kohdan 2) nojalla $\lim_{n\to\infty} |c|^n = 0 \overset{\text{L.3.5.}}{=} \lim_{n\to\infty}(-|c|^n)$.

Mutta nyt

$$|c^n| = |c|^n,$$

joten erityisesti

$$|c^n| \le |c|^n,$$
ja näinpä
$$\underbrace{-|c|^n}_{\to 0} \le c^n \le \underbrace{|c|^n}_{\to 0} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$
kun $n \to \infty$

Siispä suppiloperiaatteen nojalla myös $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.
Ok.

4)

$c > 1$:
Nyt $c = 1 + b, missä\ b = c - 1 > 0$, ja siten
$$c^n = (1+b)^n \underset{\text{(Bernoulli)}}{\ge} 1 + nb.$$
Kun $M > 0$, voidaan siis valita $N > \frac{M}{b}$, ja tällöin kaikille $n \ge N$ saadaan, että
$$x_n = c^n > nb \ge Nb > \frac{M}{b} * b = M. \text{Ok.}$$
Siispä
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

5)

$c <$ -1:
Nyt $|c| > 1$, jolloin 4)-kohdan nojalla
$$|c^n| = |c|^n \to \infty\ kun\ n \to \infty.$$
Tällöin erityisesti jono $x_n = c^n$ ei ole rajoitettu, joten (x_n) hajaantuu (L.3.4).
Koska $x_n > 0$ kun n parillinen ja $x_n < 0$, kun n pariton, ei (x_n) voi hajaantua ∞: $een\ tai\ -\infty$: een.

6)

$c =$ -1:
Tällöin $x_n = (-1)^n$ hajaantuu (Esim. 3.7.).

b)

Olkoon $c > 0$ ja $x_n = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.
Tällöin
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Perustelu:

1)

c>1:
juuri on kasvava
Tällöin $c^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = 1$,
joten
$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n,$$
missä
$$b_n = c^{\frac{1}{n}} - 1 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Bernoullin epäyhtälön nojalla
$$c = (1 + b_n)^n \ge 1 + nb_n,$$
joten
$$0 < b_n \le \frac{c-1}{n} \to 0, kun\ n \to \infty,$$
joten suppiloperiaatteen nojalla $b_n \to 0, kun\ n \to \infty$,
ja siten
$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1 + b_n) = 1. Ok.$$

2)

0<c<1:
Nyt $\frac{1}{c} > 1$,
joten
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$
ja siten

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Ok.

4. Suppenemiskriteerioita

Luvussa 3 perustelimme jonon (x_n) suppenemisen osoittamalla, että jonolla on raja-arvo $a \in \mathbb{R}$. Usein on kuitenkin tärkeää tietää, että jono suppenee, vaikka raja-arvoa ei osattaisi suoraan määrittää.

Esim.

Neperin luku $e \in \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mutta mist tiedetään, että lukujono $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ suppenee? Muutoinhan määritelmässä ei ole järkeä!

Tässä apuun tulevat rajoitetut monotoniset jonot ja täydellisyysaksiooma.

Määritelmä

Lukujono (x_n) on

i)

ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \leq M$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

ii)

alhaalta rajoitettu, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \geq m\ kakille\ n \in \mathbb{N}$.

iii)

kasvava, jos $x_n \leq x_{n+1}\ kaikille\ n \in \mathbb{N}$.

iv)

vähenevä, jos $x_n \geq x_{n+1}\ kaikille\ n \in \mathbb{N}$.

Huom.

a)

Lukujono (x_n) on rajoitettu, jos ja vain jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu. (mieti!)

b)

Lukujono on **monotoninen**, jos se on kasvava tai vähenevä.

c)

Lukujono (x_n) on aidosti kasvava (aidosti vähenevä) jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee $x_n < x_{n+1}$ (vastaavasti $x_n > x_{n+1}$).

d)

Jos jono (x_n) on kasvava ja $n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $n < m, niin\ x_n \leq x_m$. (Koska $x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \cdots \leq x_{m-1} \leq x_m$). Vastaava pätee tietysti myös väheneville jonoille.

Lause 4.1.

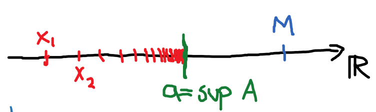
a)

Jos lukujono (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin jono (x_n) suppenee (eli on olemassa raja-arvo $a \in \mathbb{R}$).

b)

Jos lukujono (x_n) on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono (x_n) suppenee.

Todistus



a)

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Oletuksen nojalla on $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \leq M\ kaikilla\ n \in \mathbb{N}$, joten joukko A on ylhäältä rajoitettu (ja tietysti A on epätyhjä). Täydellisyysaksiooman nojalla on siis olemassa pienin yläraja $\sup A \in \mathbb{R}$. Merkitään $a = \sup A$ ja osoitetaan, että $a = \lim_{n\to\infty} x_n$:

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $a = \sup A$, on Lauseen 2.3. nojalla olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $x_N > a - \epsilon$ (koska $a - \epsilon$ ei voi olla A:n yläraja). Koska (x_n) on kasvava ja $x_n \le a$ $kaikille\ n \in \mathbb{N}$ (sillä $a = \sup A$ on yläraja), pätee kaikille $n \ge N\ että\ \underbrace{|x_n - a|}_{x_n \le a} = a - \underbrace{x_n}_{\ge x_N \text{ kun } n \ge N}$ $\le a - \underbrace{x_N}_{(x_N > a-\epsilon)} < \epsilon$.

Siispä todella $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ raja-arvon määritelmän nojalla.

b)

Todistetaan joko samaan tapaan tai käyttäen a)-kohtaa jonoon ($-x_n$), joka on kasvava ja rajoitettu (mieti!).

Ok.

Lausetta 4.1. voi usein soveltaa rekursiivisesti määriteltyjen jonojen yhteydessä:

Esim.

Olkoon $x_1 = 1$ ja $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1\ kaikille\ n \in \mathbb{N}$.
Osoitetaan, että jono (x_n) suppenee ja määrätään sen raja-arvo:

Ratkaisu:

1)

(x_n) on ylhäältä rajoitettu: Osoitetaan induktiolla, että $x_n \le 10\ \forall n \in \mathbb{N}$:

perusaskel (n=1):

$x_1 = 1 \le 10$. Ok.

induktioaskel (n=k):

Oletetaan, että $x_k \le 10\ jollekin\ k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\underbrace{x_k}_{\le 10} + 1 < \frac{1}{2} * 10 + 1 = 6 \le 10.\ \text{Ok.}$$

Siispä $x_n \le 10\ \forall n \in \mathbb{N}$ induktioperiaatteen nojalla.

2)

(x_n) on kasvava: Osoitetaan induktiolla, että $x_n \le x_{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$:

perusaskel (n=1):

Nyt $x_1 = 1\ ja\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, joten $x_1 \le x_2$. Ok.

induktioaskel (n=k):

Oletetaan, että $x_k \le x_{k+1}$ jollekin $k \in \mathbb{N}$ ja pitää osoittaa, että $x_{k+1} \le x_{k+2}$.
Nyt

$$x_{k+2} = \frac{1}{2}\overbrace{x_{k+1}}^{\ge x_k} + 1 \ge \frac{1}{2}x_k + 1 = x_{k+1},$$

joten todella

$$x_{k+1} \le x_{k+2}.$$

Ok.

Induktioperiaatteen nojalla (x_n) on kasvava.

Koska (x_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, on Lauseen 4.1. nojalla olemassa $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$.
Mutta selvästi myös $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, jolloin Lauseen 3.5. nojalla saadaan, että

⊛

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x_n + 1\right) \underset{1.3.5.}{=} \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + 1 = \tfrac{1}{2}a + 1$$

eli

$$a = \frac{1}{2}a + 1, \text{ joten } \frac{1}{2}a = 1 \text{ ja siispä } a = 2.$$

Saadaan siis, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Huom.

Raja-arvon olemassaolo on tiedettävä, sillä pelkkä lasku ⊛ ei takaa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Tutkitaan esim. jonoa $x_1 =$ -1 $ja\ x_{n+1} = x_n^2 - 1$. Jos nyt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, niin saadaan että

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 - 1) = a^2 - 1$$

eli

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Tällöin saataisiin, että

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ tai\ a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kuitenkaan jono (x_n) ei suppene, koska

$$x_1 = \text{-}1, x_2 = 0, x_3 = \text{-}1, x_4 = 0, x_5 = \text{-}1, \dots,$$

eli

$$x_n = \begin{cases} -1, & \text{kun } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{kun } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

ja näin ollen jono (x_n) hajaantuu.

Osoitetaan nyt, että luku e on todella olemassa:

Esimerkki 4.2.

Lukujono $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu ja siten Lauseen 4.1. nojalla suppeneva.

Perustelu:

1) (x_n) on kasvava:

Riittää osoittaa, että $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ $(koska\ x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N})$.

Nyt

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right) * \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right) * \left(\underbrace{\frac{\frac{n+1+1}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}}_{= \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{\overbrace{n^2+2n+1}^{(n+1)^2}-1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}_{\geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}} \quad \text{Bernoulli } \left(x = \frac{-1}{(n+1)^2} > -1\right)$$

$$\geq \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=\frac{n+1}{n}}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{\frac{n+1-1}{n+1}} = 1$$

joten

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1.$$

Ok.

2) (x_n) on ylhäältä rajoitettu:

Samaan tapaan kuin 1)-kohdassa, voidaan osoittaa, että jono $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ on myös kasvava (HT, Harj. 5).

Tällöin kaikille $n \geq 2$ saadaan, että

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} * \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right) * \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{= 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1}\right)^n$$

funktio $x \mapsto x^n$

1 1 1 1

$= 1 - \frac{1}{n^2} \le 1$

funktio $x \mapsto x^n$ on aid. kasvava kun $x>0$

$$< \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{y_n} \le \frac{1}{y_2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

(y_n) kasvava ja >0

Siispä $x_n < 4$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten (x_n) on ylhäältä rajoitettu. Ok.

Siispä Lauseen 4.1. nojalla luku $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on olemassa, ja koska $2 \le x_n < 4$, niin täytyy olla $2 \le e \le 4$. Tämä Neperin luku e on eräs "tärkeimmistä" reaaliluvuista. Voidaan osoittaa, että $e \notin \mathbb{Q}$ (vaikka $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$).

Osajonot

Idea

Kun jätetään lukujonon (x_n) luvuista osa pois, saadaan jonon (x_n) osajono:

Määritelmä

Olkoon (x_n) lukujono. Jono (y_k) on jonon (x_n) **osajono**, jos on olemassa luonnolliset luvut

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

siten, että

$$y_k = x_{n_k} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

(Eli $y_1 = x_{n_1}, y_2 = x_{n_2}$, *jne* ...)

Esim.

a)

Jos $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 7, \ldots$, niin saadaan jonon (x_n) osajono $y_1 = x_3, y_2 = x_4, y_3 = x_7, \ldots$

(eli $x_1,\ x_2,\ \underset{\downarrow\, y_1}{\overline{x_3}},\ \underset{\downarrow\, y_2}{\overline{x_4}},\ x_5,\ x_6,\ \underset{\downarrow\, y_3}{\overline{x_7}},\ x_8, \ldots$)

b)

Jos $x_n = (-1)^n$, niin valitsemalla $n_k = 2k$ saadaan osajono $y_k = x_{n_k} = x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ *kaikille* $k \in \mathbb{N}$ eli saadaan jono 1,1,1,1, ...

(Siis valitaan $-1,\underset{y_1}{\overline{1}},-1,\underset{y_2}{\overline{1}},-1,\underset{y_3}{\overline{1}},-1,\underset{y_4 \ldots}{\overline{1}}, \ldots$)

Vastaavasti jos $n_k = 2k+1$, saadaan osajono $y_k = (-1)^{2k+1} = -1$ *kaikille* $k \in \mathbb{N}$.

c)

Olkoon $x_n = \frac{1}{n}$ *ja* $n_k = k^2$. Saadaan osajono $y_k = x_{n_k} = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{k^2}$ eli jonosta $\underset{\downarrow\, y_1}{\overline{1}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \underset{\downarrow\, y_2}{\overline{\tfrac{1}{4}}}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \underset{\downarrow\, y_3}{\overline{\tfrac{1}{9}}}, \frac{1}{10}, \ldots$

poimitaan osajono $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

Sen sijaan jonot

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots$$

eivät ole jonon $x_n = \frac{1}{n}$ osajonoja.

Lause 4.3.

> Jos jono (x_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$,
> niin myös jokainen jonon (x_n) osajono suppenee kohti lukua a.

Todistus

Olkoon $y_k = x_{n_k}$ jonon (x_n) osajono.
Tällöin $n_k \geq k\ \ kaikille\ k \in \mathbb{N}\ (koska\ 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k\ ja\ n_k \in \mathbb{N})$.
Kun $\epsilon > 0$, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \epsilon$ aina kun $n \geq N$. Mutta tällöin kaikille $k \geq N$ pätee, että $n_k \geq k \geq N$ ja siten $|y_k - a| = |x_{n_k} - a| \underset{n_k \geq N}{<} \epsilon$. Siispä $\lim_{k\to\infty} y_k = a. Ok.$

Huom.

Lauseesta 4.3. seuraa, että jos jonolla (x_n) on osajonot (y_k) ja (z_k) siten, että $\lim_{n\to\infty} y_k = a \neq b = \lim_{k\to\infty} z_k$, niin jono (x_n) hajaantuu. (mieti!)

Muistetaan Lauseesta 3.4, että jokainen suppeneva jono on rajoitettu. Käänteinen väite ei päde, koska esim. jono $(\text{-}1)^n$ on rajoitettu, mutt se hajaantuu. Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisella rajoitetulla jonolla on kuitenkin olemassa ainakin suppeneva osajono. Aloitetaan monotonisen osajonon olemassaololla:

Lause 4.4.

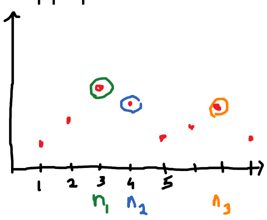
Olkoon (x_n) mikä tahansa lukujono.
Tällöin jonolla (x_n) on olemassa monotoninen (eli kasvava tai vähenevä) osajono.

Todistus

(Lyhyehkö, mutta ei tarvitse osata ulkoa)

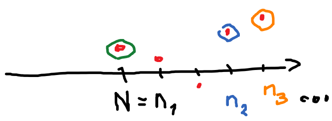
Sanotaan, että indeksi $m \in \mathbb{R}$ on jonon (x_n) **huippupiste**, jos kaikille $n > m$ pätee, että $x_n < x_m$.
Nyt on tasan kaksi vaihtoehtoa:

1) Huippupisteitä on äärettömän monta, olkoot ne $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$



Tällöin osajono $y_k = x_{n_k}$ on vähenevä, sillä
$y_{k+1} = x_{n_{k+1}} \underset{\text{koska } n_k \text{ on huippupiste}}{<} x_{n_k} = y_k$. Ok.

2) Huippupisteitä on äärellinen määrä. Tällöin on erityisesti olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että mikään $n \geq N$ ei ole huippupiste.
Valitaan $n_1 = N$. Koska N ei ole huippupiste,
on olemassa $n_2 > n_1$ siten, että $x_{n_2} \geq x_{n_1}$.
Toisaalta $n_2 > n_1 = N$, joten myöskään n_2
ei ole huippupiste , ja siten löytyy $n_3 > n_2$ jolle



$x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Näin jatkaen saadaan luvut $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ siten, että $x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq x_{n_3} \leq \cdots \leq x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ eli on löydetty kasvava osajono $y_k = x_{n_k}$. Ok.

Lause 4.5.

(Bolzano-Weierstrass)

Olkoon lukujono (x_n) rajoitettu. Tällöin jonolla (x_n) on suppeneva osajono.

Todistus

Lauseen 4.4 nojalla jonolla (x_n) on montoninen (kasvava tai vähenevä) osajono (y_k), joka on tietysti myös (ylhäältä ja alhaalta) rajoitettu. Mutta tällöin Lauseen 4.1. nojalla jono (y_k) suppenee. Ok.

Huom.

Todistuksen pohjalla on täydellisyysaksiooma, jota tarvittiin L.4.1. todistuksessa.

Esim.

a)

Rajoitetulla jonolla $x_n = (\text{-}1)^n$ on suppenevat osajonot $(x_{2k})\ ja\ (x_{2k+1})$ (ja muitakin!)

b)

Jono $x_n = \sin n$ on rajoitettu (koska $-1 \leq \sin n < 1$), joten sillä on L.4.5. nojalla suppeneva (ja myös monotoninen) osajono $y_k = \sin n_k$. (Onkohan (y_k) kasvava vai vähenevä? Mikähän sen raja-arvo on? Hankala sanoa…)

Seuraavaa määritelmää emme tarvitse tällä kurssilla, mutta myöhemmillä kursseilla tämä osoittautuu hyvin tärkeäksi:

Määritelmä

Lukujono (x_n) on **Cauchy-jono** jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - x_m| < \epsilon$ aina kun $n \geq N\ ja\ m \geq N$.

Lause 4.6.

Lukujono (x_n) suppenee jos ja vain jos (x_n) on Cauchy-jono.

Todistus

Kurssilla MATA118 (RAP)
(Esimerkiksi keväällä 2015 alkaen 16.3.).
Ok.

Huom.

Tämäkin todistus pohjautuu täydellisyysaksioomaan.

5. Jatkuvien funktioiden peruslauseita

3. joulukuuta 2014 14:13

Muista

Funktio $f: A \to \mathbb{R}$ on **jatkuva pisteessä** $a \in A$, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

aina kun $x \in A$ *ja* $|x - a| < \delta$.

Funktio f on **jatkuva** (joukossa A) jos f on jatkuva kaikissa pisteissä $a \in A$.

Seuraavaksi tutkitaan suljetulla ja rajoitetulla välillä $A = [a, b]$ $(missä\ a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ jatkuvia funktioita ja todistetaan näille tärkeitä ominaisuuksia lukujen 2-4 tulosten avulla (sup/inf ja lukujonot).

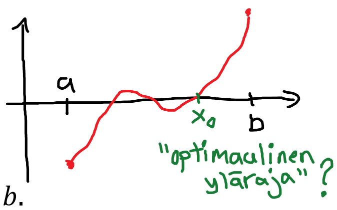
Lause 5.1.

(Bolzanon lause)

Olkoot
$$a, b \in \mathbb{R}, a < b,$$
ja
$$f: [a, b] \to \mathbb{R}$$
jatkuva funktio.
Jos
$$f(a) \le c \le f(b), \quad (\text{tai } f(a) \ge c \ge f(b))$$
niin on olemassa ainakin yksi
$$x_0 \in [a, b]$$
jolle
$$f(x_0) = c.$$

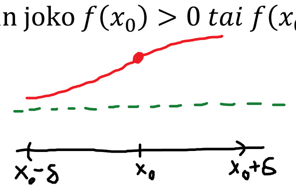
Todistus

1) Todistetaan ensin tapaus $c = 0$:

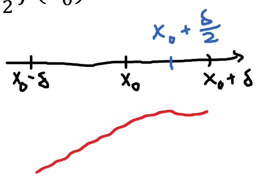


Oletetaan siis, että $f(a) \le 0 \le f(b)$. Merkitään
$$B = \{x \in [a, b]: f(x) \le 0\}.$$
Tällöin $B \neq \emptyset$ koska $a \in B$ ja B on ylhäältä rajoitettu koska kaikille $x \in B$ pätee ainakin $x \le b$.
Siispä täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa $\sup B \in \mathbb{R}$. Merkitään $x_0 = \sup B$ ja osoitetaan, että $f(x_0) = 0$. Tehdään antiteesi, että $f(x_0) \neq 0$, jolloin joko $f(x_0) > 0$ *tai* $f(x_0) < 0$.

i) Jos $f(x_0) > 0$, niin Lauseen 1.5. nojalla on $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$ *kaikille* $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Mutta tällöin $x_0 - \delta$ olisikin B:n yläraja, mikä on ristiriita, koska $x_0 - \delta < x_0 = \sup B$. ↯



ii) Toisaalta jos $f(x_0) < 0$, niin jälleen L1.5. nojalla $f(x) < \frac{1}{2} f(x_0) < 0$ aina kun $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
Mutta tällöin erityisesti $x_0 + \frac{\delta}{2} \in B$, mikä on ristiriita, koska x_0 on B:n yläraja. ↯



Siispä täytyy olla $f(x_0) = 0$.
Ok.

2) Kun $c \neq 0$, tutkitaan funktiota $g(x) = f(x) - c$. Tällöin $g(a) = f(a) - c \le 0 \le f(b) - c = g(b)$ ja g on jatkuva välillä $[a, b]$, joten 1)-kohdan nojalla on $x_0 \in [a, b]$ siten, että $g(x_0) = f(x_0) - c = 0$, joten $f(x_0) = c$. Ok.

3) Tapauksessa $f(a) \ge c \ge f(b)$ voidaan soveltaa 2)-kohdan funktioon -f. $\square$

3) Tapauksessa $f(a) \geq c \geq f(b)$ voidaan soveltaa 2)-kohdan funktioon -f. $\square$

Huom.

a)

Muista, että Lemma 1.5 perustui suoraan jatkuvuuden määritelmään (pisteessä x_0).

b)

Koska piste x_0 voi kuitenkin olla (periaatteessa) mikä tahansa välin $[a, b]$ piste, täytyy Lauseessa 5.1. olettaa jatkuvuus koko välillä $[a, b]$.

c)

Lauseen ehdon $f(x) = c$ toteuttavia pisteitä x voi tietysti olla välillä $[a, b]$ useitakin (todistus antaa näistä suurimman).

d)

Reaalilukujen täydellisyysominaisuus on Bolzanon lauseessa erittäin oleellinen: Vertaa esim. tilanteeseen, jossa tutkitaan funktiota $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 - 2$. Tällöin f on jatkuva ja $f(0) = -2 < 0 < 2 = f(2)$, mutta ei ole lukua $x_0 \in \mathbb{Q}$ siten, että $x_0 \in [0,2]$ ja $f(x_0) = 0$ (koska ainoa ehdokas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Esim.

Osoita, että yhtälöllä $x_3 - x - 1$ on ratkaisu välillä [1, 2].

Ratkaisu:
Merkitään $p(x) = x_3 - x - 1$ jolloin p on polynoina jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä (Seuraus 1.3.), erityisesti siis myös välillä [1, 2]. Koska $p(1) =$ -1 < 0 ja $p(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$, niin Bolzann lauseen nojalla on x_0 ∈[1, 2] siten, että $f(x_0) = 0$.
Ok.

Bolzanon lauseen avulla voidaan nyt perustella JRF-kurssilla tarvittu tieto, joka takaa juuren $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ olemassaolon kaikille $n \in \mathbb{N}$ kun $x \geq 0$.

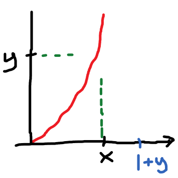
Lause 5.2.

(vrt. JRF Seuraus 2.8.)

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktio
$$f: [0, \infty[\to [0, \infty[, \qquad f(x) = x^n,$$
on bijektio
(eli kaikille $y \in [0, \infty[$ on tasan yksi $x \in [0, \infty[$ jolle $f(x) = y$).

Todistus

Injektiivisyys seuraa f:n aidosta kasvavuudesta (JRF), joten riittää todistaa surjektiivisuus:
Olkoon $y \in [0, \infty[$. Valitaan a = 0 ja b = 1 + y. Polynomina f on jatkuva välillä [a,b], ja $f(a) = f(0) = 0$. Lisäksi
$$f(b) = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny \geq y$$
(Bernoulli) (n ≥ 1, y ≥ 0)



eli $f(a) \leq y \leq f(b)$, joten Bolzanon lauseen nojalla on olemassa $x_0 \in [a, b] \subset [0, \infty[$ $jolle$ $f(x_0) = y$. Ok. $\square$

Näin ollen juurifunktio voidaan todella määritellä potenssin käänteisfunktioksi
$f^{-1}: [0, \infty[\to [0, \infty[, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$
(eli $y = \sqrt[n]{x} <=> y^n = x$)

Juurifunktioiden jatkuvuuteen palataan (vähän) myöhemmin.

Esim.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ pariton. Tällöin jokaisella asteen n polynomilla on nollakohta.

Perustelu:
Voidaan olettaa, että $a_n = 1$, jolloin siis $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$
$= x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}_{= S(x)}$, $(missä\ a_k \in \mathbb{R}\ kun\ k = 0,1,2,\ldots,n-1)$.

Olkoon $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$. Kun $|x| \geq 1$, pätee, että

$$\frac{a_{n-1}}{x} \geq -\left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| \geq \frac{-A}{|x|}$$

$$\frac{a_{n-2}}{x^2} \geq -\left|\frac{a_{n-2}}{x^2}\right| = -\frac{|a_{n-2}|}{|x|^2} \geq \frac{-A}{|x|^2} \geq \frac{-A}{|x|} \quad (koska\ |x|^2 \geq |x|)$$

...

$$\frac{a_0}{x^n} \geq -\left|\frac{a_0}{x^n}\right| \geq \cdots \geq -\frac{A}{|x|}.$$

Siispä

$$S(x) \geq 1 - \underbrace{\frac{A}{|x|} - \frac{A}{|x|} - \cdots - \frac{A}{|x|}}_{n\ kpl} = 1 - \frac{nA}{|x|}$$

Erityisesti, kun

$$|x| \geq 2nA,$$

on

$$\frac{nA}{|x|} \leq \frac{1}{2},$$

joten kun $\max(1, 2nA)$, on

$$S(x) \geq 1 - \underbrace{\frac{nA}{|x|}}_{\leq \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Valitaan nyt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $x_1 > \max(1, 2nA)$ ja $x_2 < -\max(1, 2nA)$. Tällöin $x_1^n > 0\ ja\ x_2^n < 0$ (koska n on pariton), joten

$$p(x_1) = \underbrace{x_1^n}_{>0}\underbrace{S(x_1)}_{\geq \frac{1}{2}} > 0 \quad ja \quad p(x_2) = \underbrace{x_2^n}_{<0}\underbrace{S(x_2)}_{\geq \frac{1}{2}} < 0$$

Nyt Bolzanon lause takaa, että funktiolla p on todella nollakohta välillä $[x_2, x_1]$.
Ok.

Huom.

Muista, että parillisen asteen polynomeilla ei ole aina (reaalista) nollakohtaa (esim. $p(x) = x^4 + 2$).

Seuraavana tavoitteena on todistaa, että välillä [a,b] jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa. Todistetaan kuitenkin ennen tätä pari muuta hyödyllistä tulosta:

Lause 5.3.

("Raja-arvot ja jatkuvuus 1")

> Olkoon $f: A \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $a \in A$,
> ja olkoon (x_n) lukujono siten, että $x_n \in A$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
> Tällöin $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Todistus

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on jakuva a:ssa, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\overbrace{|f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ aina kun } x \in A\ ja\ |x-a| < \delta}^{*}$. Toisaalta, koska $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \delta$ aina kun $n \geq N$ (raja-arvon määritelmää käytetään siis luvulle $\delta > 0$).
Mutta tällöinhän kaikille $n \geq N$ pätee, että $x_n \in A\ ja\ |x_n - a| < \delta$, jolloin jatkuvuuden ehdon * nojalla $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Siispä raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. ◻

Huom.

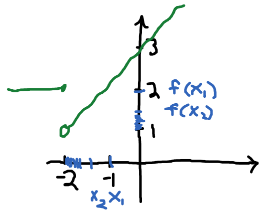
Lauseen 5.3. avulla on usein kätevä osoittaa funktio f epäjatkuvaksi a:ssa, sillä riittää löytää yksikin jono

(x_n), missä $x_n \in A$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, mutta $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ (tai $f(x_n)$ ei suppene ollenkaan).

Esim.

a)

Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le -2 \\ x+3, & x > -2 \end{cases}$



Valitaan $x_n = -2 + \frac{1}{n}$,

jolloin $f(x_n) \underset{(x_n > -2)}{=} x_n + 3 = -2 + \frac{1}{n} + 3 = 1 + \frac{1}{n}$.

Tällöin $x_n \to -2$ ja $f(x_n) \to 1$ kun $n \to \infty$, mutta $f(-2) = 2 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.
Siispä f on epäjatkuva pisteessä x = -2.

b)

Harjoituksissa 6 osoitetaan L.5.3:n avulla, että funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
on epäjatkuva 0:ssa.

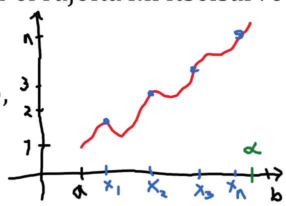
Muista, että funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos on $M > 0$ siten, että $|f(x)| \le M$ (eli $-M \le f(x) \le M$) kaikille $x \in A$. Osoitetaan, että suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu (vrt. Lause 1.1):

Lause 5.4.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva.
Tällöin f on rajoitettu.

Todistus

Tehdään antiteesi, että f ei ole rajoitettu. Tällöin erityisesti mikään $n \in \mathbb{N}$ ei rajoita f:n itseisarvoa, joten kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in [a,b]$ siten, että $|f(x_n)| > n$.



Koska $a \le x_n \le b$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, on jono (x_n) rajoitettu, joten sillä on Bolzano-Weierstassin lauseen (L.4.5) nojalla suppeneva osajono (y_k), missä $y_k = x_{n_k}$ jollekin $n_k \ge k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Olkoon $\alpha = \lim_{k\to\infty} y_k$, jolloin ehdosta $a \le y_k \le b$ seuraa, että myös $a \le \alpha \le b$ (vrt. Harj. 5 teht. 4). Koska f on jatkuva, niin myös |f| on jatkuva (L.1.6.b), ja siten L.5.3. nojalla $\lim_{k\to\infty} |f(y_k)| = |f(\alpha)| \in \mathbb{R}$.
Mutta toisaalta kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee, että $|f(y_k)| = |f(x_{n_k})| \underset{(x_{n_k}\text{ valinta})}{>} n_k \ge k$, jolloin

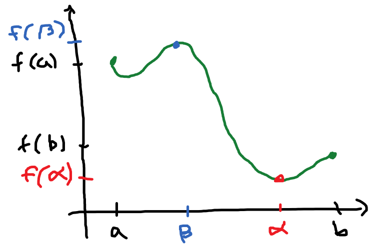
$|f(x_n)|$ hajaantuu äärettömyyteen, mikä on ristiriita, koska todettiin, että jonon $|f(y_k)|$ raja-arvon on $|f(\alpha)|$. ↯
Siispä funktion f täytyy olla rajoitettu välillä [a,b]. □

Lause 5.5.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva.
Tällöin f saavuttaa välillä [a,b] suurimman ja pienimmän arvonsa.
Toisin sanoen, on olemassa luvut $\alpha, \beta \in [a,b]$ siten, että
$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$$
kaikille $x \in [a,b]$.

Todistus

Todistetaan suurimman arvon olemassaolo (minimi todetaan vastaavasti). Lauseen 5.4. nojalla on olemassa $M > 0$ siten, että $-M \le f(x) \le M$ kaikille $x \in [a,b]$, joten kuvajoukko $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu, ja siten on olemassa $\sup f([a,b]) \in \mathbb{R}$ (täydellisyysaksiooma).



Merkitään $M_0 = \sup f([a,b])$. Kun $n \in \mathbb{N}$, niin $M_0 - \frac{1}{n}$ ei ole $f([a,b])$: n yläraja, joten on olemassa $x_n \in [a,b]$ siten, että $f(x_n) > M_0 - \frac{1}{n}$ (vrt. L.2.3).
Jono (x_n) on (taas) rajoitettu (koska $x_n \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$) joten on olemassa suppeneva osajono $y_k = x_{n_k}$ (L.4.5 B-W). Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee $n_k \ge k$, ja siten

$M_0 - \frac{1}{k} \le M_0 - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = f(y_k) \le M_0$

on olemassa suppeneva osajono $y_k = x_{n_k}$ (L.4.5 B-W). Tälloin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee $n_k \geq k$, ja siten

$$M_0 - \frac{1}{k} \leq M_0 - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = f(y_k) \leq M_0.$$

$k \leq n_k$

M_0 kun $k \to \infty$

Siispä suppiloperiaatteen nojalla $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = M_0$. Toisaalta (y_k) suppenee, olkoon $\lim_{k\to\infty} y_k = \beta$, jolloin ehdosta $a \leq y_k \leq b$ seuraa, että myös $a \leq \beta \leq b$. Tällöin lauseen 5.3. nojalla $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = f(\beta)$. Koska raja-arvo on yksikäsitteinen (L. 3.3), täytyy siis olla $f(\beta) = M_0 = \sup f([a,b])$, joten erityisesti $f(\beta) \geq f(x)$ *kaikille* $x \in [a,b]$. Ok. □

Huom.

Lauseissa 5.4 ja 5.5 kaikki oletukset eli

i) f on jatkuva koko välillä A = [a,b]
ii) väli A on suljettu
iii) väli A on rajoitettu

ovat oleellisia:

Esim.

i)

Funktio $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
ei ole rajoitettu välillä [-1,1]
eikä saavuta suurinta tai pienintä arvoaan, mutta f ei olekaan jatkuva 0:ssa.

ii)

Funktio $f:]0,1] \to \mathbb{R}$, $\; f(x) = \frac{1}{x}$ on kyllä jatkuva välillä $]0,1]$, mutta f ei ole rajoitettu tällä välillä (eikä siten saavuta suurinta arvoaan; pienin arvo tosin on $f(1) = 1$). Ongelmana on se, että väli $]0,1]$ ei ole suljettu.
Myöskään rajoitettu funktio $f:]0,2[\to \mathbb{R}$, $\; f(x) = 2x + 1$, ei saavuta suurinta eikä pienintä arvoaan, koska $f(]0,2[) =]1,5[$, joten esim. $\inf(f(]0,2[) = 1 \notin f(]0,2[)$.

iii)

Funktiot $f, g: [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $\; f(x) = x^2$, $\; g(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$,
ovat jatkuvia, mutta kumpikaan ei saavuta suurinta arvoaan joukossa $[1,\infty[$ (mieti!).

Lauseet 5.1. (Bolzano) ja 5.5 (max/min) yhdistämällä saadaan tärkeä seuraus :

Seuraus 5.6.

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $\; a < b$, $\;$ ja
$\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$
jatkuva funktio.
Tällöin kuvajoukko
$\quad f([\text{a,b}])$
on suljettu ja rajoitettu väli eli on olemassa $m, M \in \mathbb{R}$ siten, että
$\quad f([\text{a,b}]) = [m, M]$.
(Huom: Erikoistapauksessa, jossa f on vakio välillä [a,b], on $m = M$, joten
$\quad f([\text{a,b}]) = [m,m] = \{m\}$.)

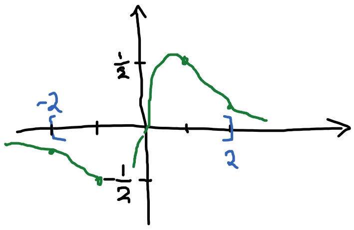
Todistus

Lauseen 5.5. nojalla f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa eli on $\alpha, \beta \in [a,b]$ siten, että $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ kaikille $x \in [a,b]$.
Merkitään $m = f(\alpha)$ *ja* $M = f(\beta)$ ja osoitetaan, että
$\quad f([\text{a,b}]) = \{f(x) : x \in [a,b]\} = [m, M]$.
"$\subset$" Kun $x \in [a,b]$, niin $m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$, joten $f(x) \in [m,M]$. *Ok.*
"$\supset$" Olkoon $c \in [m,M]$. Koska $f(\alpha) = m$ *ja* $f(\beta) = M$ *ja* f on jatkuva, saa f Bolzanon lauseen nojalla myös arvon c jossakin pisteiden α *ja* β välissä (eli jos $\alpha < \beta$, niin on $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$ s.e. $f(x_0) = c$ ja

jos $\alpha \geq \beta$, niin on $x_0 \in [\beta, \alpha] \subset [a,b]$ s.e. $f(x_0) = c$).
Siispä $c \in f([a,b])$, joten $[m, M] \subset f([a,b])$. $\square$

Joskus edellisiä lauseita voi hyödyntää myös tapauksissa, joissa tarkasteltava väli on rajoittamaton tai ei ole suljettu, jos käytössä on muita sopivia lisäoletuksia:

Esim.



Osoita, että funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$,
saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa $\mathbb{R}$
(eli että on olemassa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.e. $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$).

Ratkaisu:
Huomataan, että $f(1) = \frac{1}{2}$ ja $f(\text{-}1) = \frac{-1}{2}$, ja kun $|x| \geq 2$, niin

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{1+x^4}\right| = \frac{|x|}{1+x^4} < \frac{|x|}{x^4} = \frac{1}{|x|^3} \leq \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Rationaalifunktiona f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä, erityisesti välillä [-2,2], joten Lauseen 5.5. nojalla f saavuttaa välillä [-2,2] suurimman ja pienimmän arvonsa eli on $\alpha, \beta \in [\text{-}2, 2]$ siten, että $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ *kaikille* $x \in [\text{-}2, 2]$. (*)
Mutta koska -1,1 $\in [\text{-}2, 2]$, joten erityisesti $f(\alpha) \leq f(\text{-}1) = \frac{-1}{2}$ ja $f(\beta) \geq f(1) = \frac{1}{2}$.
Tällöin kaikille $x \in]\text{-}\infty, \text{-}2[\cup]2, \infty[$ saadaan, että

$$f(\alpha) \leq \frac{-1}{2} < \frac{-1}{8} \leq f(x) \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{2} \leq f(\beta) \quad (**) \quad (koska\ |x| > 2).$$

Nyt (*) + (**)
$\Rightarrow f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ *kaikille* $x \in \mathbb{R}$. *Ok*.

6. Funktioiden raja-arvot

Usein funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvuus pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:
f on jatkuva x_0:ssa jos (ja vain jos) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Tämä on kyllä totta, mutta ehdon hyödyntäminen edellyttää raja-arvon käsitteen täsmällisen määritelmän, joka on itse asiassa hyvin samankaltainen kuin jatkuvuuden $\epsilon - \delta$-määritelmä:

Määritelmä

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $x_0 \in I$.
Luku $\alpha \in \mathbb{R}$ on funktion $f: I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ **raja-arvo pisteessä** x_0,
jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ aina, kun $x \in I$ *ja* $0 < |x - x_0| < \delta$.

Tällöin merkitään $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$
tai $f(x) \to \alpha$, *kun* $x \to x_0$.

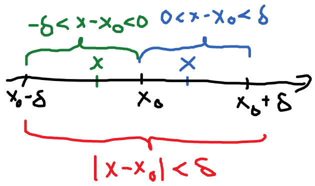
Huom.

a)
Keskeisin ero jatkuvuuden määritelmään: Pistettä x_0 ei tarkastella ehdossa, joten funktion ei tarvitse olla edes määritelty x_0:*ssa*.

b)
Kun raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen. (Todistetaan kuten vastaava tulos lukujonoille eli Lause 3.3.) .

c)
Voidaan määritellä myös ns. **toispuoleiset raja-arvot**:
i) oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$,
jos raja-arvon määritelmässä ehto $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ pätee aina kun $0 < x - x_0 < \delta$ (*ja* $x \in I$).
ii) vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, jos ehto $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ pätee aina kun $\text{-}\delta < x - x_0 < 0$ (*erityisesti* $x < x_0$).

$x_0 < 0$ (*erityisesti* $x < x_0$).



Esim.

Osoita, että $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, kun
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$$

Ratkaisu:

Olkoon $\epsilon > 0$. Kun $x \neq 3$, niin
$$|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} - 4\right| = \left|\frac{x^2 - 2x - 3 - 4x + 12}{x - 3}\right| = \left|\frac{\overbrace{x^2 - 6x + 9}^{=(x-3)^2}}{x - 3}\right| = |x - 3|.$$
Voidaan siis valita $\delta = \epsilon$, ja tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}$ joille $0 < |x - 3| < \delta$ pätee, että
$$|f(x) - 4| = |x - 3| < \delta = \epsilon.$$
Ok.

Lause 6.1.

(Raja-arvot ja jatkuvuus 2)

> Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, $x_0 \in I$ *ja*
> $$f: I \to \mathbb{R}.$$
> Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä (eli (i) <=> (ii) <=> (iii)):
> **i)** f on jatkuva x_0:ssa.
> **ii)** $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
> **iii)** $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *ja* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Todistus

(i) <=> $\forall \epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ kun $x \in I$ *ja* $|x - x_0| < \delta$.

(koska aina $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$)

<=> $\forall \epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ kun $x \in I$ ja $0 < |x - x_0| < \delta$.

(<=> $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

<=> $\forall \epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ aina kun
$x \in I$ *ja* $\underbrace{(0 < x - x_0 < \delta \text{ tai } -\delta < x - x_0 < 0)}_{\Leftrightarrow\, 0 < |x - x_0| < \delta}$,

<=> **(iii)**. $\square$

Funktioiden raja-arvoille pätevät aivan samat laskusäännöt kuin lukujonojen raja-arvoille:

Lause 6.2.

> Olkoot $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ siten, että
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \text{ ja } \lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}.$$
> Tällöin
> **a)** f on rajoitettu pisteen x_0 lähellä eli on olemassa $M > 0$ ja $\delta > 0$ s.e.,
> $|f(x)| \le M$ aina kun $x \in I$ ja $0 < |x - x_0| < \delta$.
>
> **b)** $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = \alpha + \beta$
>
> **c)** $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \alpha\beta$
>
> **d)** Jos $\beta \neq 0$, niin $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\alpha}{\beta}$.

d) Jos $\beta \neq 0$, niin $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Todistus

Samaan tapaan kuin vastaavat väitteet jatkuville funktioille ja/tai lukujonoille. $\square$

Esim.

Määritä $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$.

Ratkaisu:

Kun $x \neq 3$, niin

$$\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+3x+9}{x+3}.$$

Siten

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} \underset{\text{L6.2.d}}{=} \frac{\lim_{x \to 3}(x^2+3x+9)}{\lim_{x \to 3}(x+3)} \underset{\text{jatkuva}}{=} \frac{3^2 + 3 * 3 + 9}{6} = \frac{9}{2}.$$

Funktioiden raja-arvoille pätevät myös tutut vertailuominaisuudet:

Lause 6.3.

Olkoot $f, g: I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$.
Jos
$$f(x) \leq g(x) \text{ kaikille } x \in I\backslash\{x_0\}$$
ja
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R},$$
niin tällöin
$$\alpha \leq \beta.$$

Lause 6.4.

(Suppiloperiaate)

Oletetaan, että
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
aina, kun
$$x \in I\backslash\{x_0\},$$
ja että
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha = \lim_{x\to x_0} h(x).$$
Tällöin myös
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha.$$

Lauseet 6.3. ja 6.4. todistetaan kuten vastaavat tulokset jonoille ja/tai jatkuville funktioille.

Esim.

a)

(Harj. 6)
Suppiloperiaatteen avulla voidaan osoittaa, että
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Tällöin Lauseen 6.1. (sekä L.1.9. ja L.1.6.) nojalla funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
on jatkuva (koko $\mathbb{R}$:ssä).
Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja f on jatkuva nollassa, saadaan nyt Lauseesta 5.3, että
$$1 = f(0) \overset{L.5.3}{=} \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n}.$$
Siispä
$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1.$$

b)

Osoitetaan, että $\lim_{n\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$:

Kun $0 < |x| < \pi$, saadaan, että

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x + 1)(\cos x - 1)}{(\cos x + 1)x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x - 1}^{= -\sin^2 x}}{(\cos x + 1)x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x + 1} * \frac{\sin x}{x}.$$

Siten

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{\cos x + 1} * \frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\underbrace{\frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}(\cos x + 1)}}_{\text{jatkuva!}\; = \frac{\sin 0}{\cos 0 + 1} = \frac{0}{2} = 0} * \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1} = 0 * 1 = 0.$$

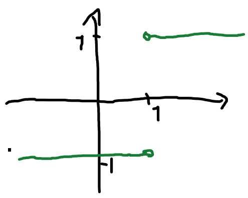
c)

Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 1}\frac{||x|-1|}{x-1}$.

Merkitään $f(x) = \frac{||x|-1|}{x-1}$ kun $x \neq 1$.

- Kun $0 < x - 1$, on erityisesti $x > 1 > 0$, joten
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1,$$
ja siten
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

- Toisaalta kun $-1 < x - 1 < 0$, on edelleen $x > 0$, joten
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$
ja näin ollen
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$



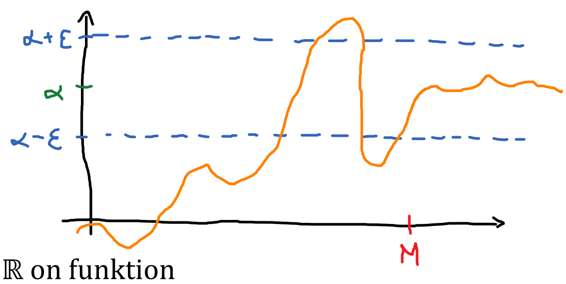
Tällöin ei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Raja-arvot ja ääretön

Muista, että ∞ *ja* $-\infty$ ovat vain symboleja, eikä niitä voi käyttää laskutoimituksissa!

Määritelmä

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $f:]a, \infty[\to \mathbb{R}$ funktio.
Luku $\alpha \in \mathbb{R}$ on funktion f **raja-arvo äärettömyydessä**, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $M > 0$ siten, että
$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \text{ aina, kun } x > M.$$
Tällöin merkitään
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha.$$



Vastaavasti luku $\beta \in \mathbb{R}$ on funktion
$$f:]-\infty, a[\to \mathbb{R}$$

raja-arvo miinus äärettömyydessä, jos kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $m < 0$ siten, että
$|f(x) - \beta| < \epsilon$ aina kun $x < m$.

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \beta.$$

Esim.

a)

Määritä $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2}$.

Ratkaisu:

Kun $x > 2$, niin $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\approx 0,\text{ kun } x \text{ iso}}}$.

Siispä näyttäisi siltä,
että raja-arvo on 1.
Perustellaan, että näin on:

Olkoon $\epsilon > 0$. Kun $x > 2$, niin

$$\left|\frac{x}{x-2} - 1\right| = \left|\frac{x-(x-2)}{x-2}\right| = \left|\frac{2}{\underbrace{x-2}_{>0}}\right| = \frac{2}{x-2}.$$

Riittää siis, että

$$\frac{2}{x-2} < \epsilon,$$

eli että

$$2 < \epsilon(x-2) = \epsilon x - 2\epsilon <=> 2\epsilon + 2 < \epsilon x$$
$$<=> x > \frac{2\epsilon+2}{\epsilon}.$$

(*)

Voidaan siis valita $M = \max\left(2, \frac{2\epsilon+2}{\epsilon}\right)$, ja tällöin kaikille $x > M$ pätee, että

$$x > \frac{2\epsilon+2}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{x}{x-2} - 1\right| = \frac{2}{x-2} \overset{(*)}{<} \epsilon.$$

Ok.

b)

Osoita, että $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2\sin x}{2x^2-1} = 0$.

Ratkaisu:

Olkoon $\epsilon > 0$.

Kun $x > 1$, niin

$$2x^2 - 1 \underset{x^2>1}{>} 2x^2 - x^2 = x^2.$$

Tällöin

$$\left|\frac{x+2\sin x}{2x^2-1} - 0\right| = \frac{|x+2\sin x|}{\underbrace{|2x^2-1|}_{>0}} \overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} \frac{\overset{x}{|x|} + 2\overbrace{|\sin x|}^{\leq 1 < x}}{2x^2-1}$$

$$\leq \frac{3x}{2x^2-1} < \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x}.$$

Voidaan siis valita $M = \max\left(1, \frac{3}{\epsilon}\right)$,
ja tällöin kaikille $x > M$ pätee

$$\left|\frac{x+2\sin x}{2x^2-1}\right| < \frac{3}{x} < \frac{3}{M} \leq \frac{3}{\frac{3}{\epsilon}} = \epsilon.$$

Ok.

Funktio voi myös hajaantua (+ tai -) äärettömyyteen pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Funktio $f: I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$
hajaantuu pisteessä $x_0 \in I$ äärettömyyteen (miinus äärettömyyteen)
jos kaikille $M > 0$ $(m < 0)$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > M \quad (f(x) < m)$$

aina kun $x \in I$ ja $0 < |x - x_0| < \delta$.

Tällöin merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right).$$

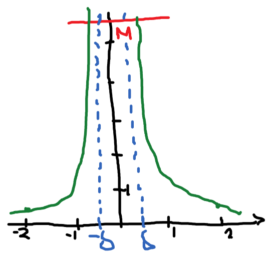
Huom.

Edellisiä määritelmiä sopivasti yhdistelemällä saadaan määriteltyä myös "toispuoleiset hajaantumiset" $\pm\infty$:een, sekä hajaantumine $\pm\infty$:een, kun $x \to \pm\infty$. (mieti!)

Esim.

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



Perustelu:
Olkoon $M > 0$.
Kun $x \neq 0$, niin

$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \sqrt{\frac{1}{M}} = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Voidaan siis valita $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$,
ja tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}$, joille $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ pätee, että

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > M.$$

Ok.

b)

Kun $x \to 0$, niin funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ ei hajaannu ∞:een tai $-\infty$:een, mutta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Osoitetaan jälkimmäinen:
Olkoon $m < 0$.
Kun $x < 0$, niin

$$\frac{1}{x} < m \iff \frac{1}{-x} > -m \iff -x < \frac{1}{-m} \iff x > \frac{1}{m}$$

$*(-1)$ $\quad$ $*(-1)$

Voidaan siis valita $\delta = \frac{-1}{m}$, ja tällöin kaikille $-\underbrace{\delta}_{=\frac{-1}{m}} < x < 0$ pätee että

$$f(x) = \frac{1}{x} < m.$$

Ok.

7. Paluu alkeisfunktioihin

Lause 7.1.

Olkoon $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava ja jatkuva.
Tällöin

Olkoon $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava ja jatkuva.
Tällöin

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

ja

$$f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$$

on bijektio.
Lisäksi

$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

on aidosti kasvava ja jatkuva.

(Huom. Vastaava tulos pätee myös aidosti väheneville funktioille.)

Todistus

1)

Kaikille $x \in [a, b]$ pätee

$$m = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = M,$$

jolloin S.5.6. $\Rightarrow f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Aidosti kasvava funktio on aina injektio (JRF. L.3.1), joten

$$f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$$

on bijektio. Ok.

2)

Myös f^{-1} on aidosti kasvava (JRF Harj. 6.6).

3)

Osoitetaan f^{-1} jatkuvaksi: Olkoon $y_0 \in]f(a), f(b)[$
(tapaukset $y_0 = f(a)$ ja $y_0 = f(b)$ käsitellään vastaavasti).
Olkoon $\epsilon > 0$. Merkitään $x_0 = f^{-1}(y_0)$,
jolloin $a < x_0 < b$, ja valitaan $x_1, x_2 \in]a, b[$ siten, että

$$x_0 - \epsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \epsilon.$$

Merkitään $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$, jolloin

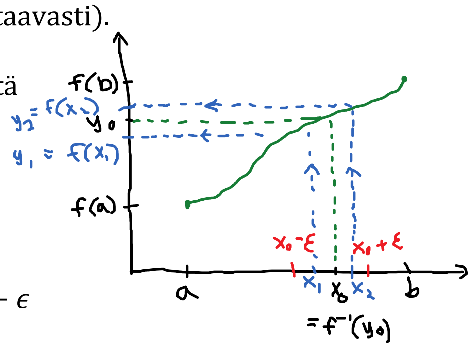
$$y_1 < y_0 < y_2$$

(koska f on aidosti kasvava).
Tällöin kaikille $y \in]y_1, y_2[$ pätee, että

$$x_0 - \epsilon < x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2 < x_0 + \epsilon$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon, \text{ joten}$$

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon.$$



Valitaan siis $\delta = \min(y_2 - y_0,\ y_0 - y_1) > 0$, ja tällöin kaikille $y \in [f(a), f(b)]$ joille pätee

$$|y - y_0| < \delta$$

on voimassa että $y \in]y_1, y_2[$, jolloin siis $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$.
Siispä f^{-1} on jatkuva jokaisessa pisteessä $y_0 \in [f(a), f(b)]$. $\square$

Seuraus 7.2.

Kun $q \in \mathbb{Q}, (q \neq 0)$, niin funktio

$$f:]0, \infty[\to]0, \infty[, f(x) = x^q$$

on jatkuva.

Todistus

Kun $n \in \mathbb{N}$, on $g_n: [0, \infty[\to [0, \infty[, g_n(x) = x^n$,
aidosti kasvava surjektio (S.5.2.) ja jatkuva (polynomi). Tällöin käänteisfunktio

$$g_n^{-1}: [0, \infty[\to [0, \infty[, g_n^{-1} = x^{\frac{1}{n}},$$

on L.7.1 nojalla jatkuva.
Kun $q \in \mathbb{Q}, q > 0$, on $q = \frac{m}{n}$ joillekiin $m, n \in \mathbb{N}$ ja tällöin

$$f(x) = x^q = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (q_n^{-1} \circ q_m)(x)$$

on jatkuva. (L.1.4.)

jatkuva

$$f(x) = x^q = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (\underbrace{q_n^{-1}}_{\text{jatkuva}} \circ \underbrace{q_m}_{\text{jatkuva}})(x)$$
on jatkuva. (L.1.4.)
Kun $q \in \mathbb{Q}$ *ja* $q < 0$, niin
kun $x > 0$,
$$f(x) = x^q = \frac{1}{x^{-q}}$$
on siis myös jatkuva (koska nyt $-q > 0$).

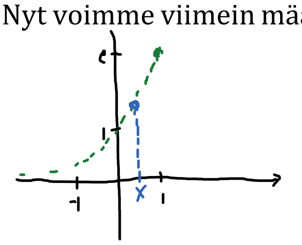
Huom.

Erityisesti siis juurifunktiot $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ovat jatkuvia.

Eksponentti ja logaritmifunktiot

Koska $e > 1$, on funktio $f\colon \mathbb{Q} \to]0,\infty[,\ f(q) = e^q$,
aidosti kasvava (JRF Lemma 4.1).
Lisäksi $e^{p+q} = e^p + e^q$ kaikille $p, q \in \mathbb{Q}$ (JRF L.2.11).
(Muista: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$).

Nyt voimme viimein määritellä täsmällisesti kaikille $x \in \mathbb{R}$, mitä on e^x:



Määritelmä

Määritellään funktio $exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ asettamalla
$$\exp(x) = \sup\underbrace{\{e^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}}_{\text{merkitään } E_x} > 0$$
$e^q > 0 \ \forall q \in \mathbb{Q}$

Lemma 7.3

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Kun } p \in \mathbb{Q},\\ \text{on } \exp(p) = e^p.\end{array}}$$

Todistus

Kun $q \in \mathbb{Q}, q < p, on\ e^q < e^p$
$\Rightarrow e^p$ on E_p:n yläraja
$\Rightarrow \exp(p) = \sup E_p \leq e^p$.

Toisaalta kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $e^{p-\frac{1}{n}} \in E_p$, joten
$$\exp(p) = \sup E_p \underset{\forall n \in \mathbb{N}}{\geq} e^{p-\frac{1}{n}} = e^p * e^{-\frac{1}{n}} = e^p * \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{\to 1,\ n\to\infty}} \xrightarrow{n\to\infty} e^p$$
Siispä
$$\exp(p) \geq e^p \geq \exp(p).$$
Ok. $\square$

Nyt voimme merkitä kaikille $x \in \mathbb{R}$ että $e^x = \exp(x)$ (koka samat kun $x \in \mathbb{Q}$).

Lause 7.4

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.}$$

Todistus

1) $\mathbf{e^{x+y} \geq e^x e^y}$

Olkoot $p, q \in \mathbb{Q}$ $s.e. p < x, \quad q < y$. Tällöin $p + q < x + y$, joten

$$e^p e^q = \underbrace{e^{p+q}}_{\in E_{x+y}} \leq \sup E_{x+y} = e^{x+y}$$

$$\overset{(HT)}{\Rightarrow} \underbrace{\sup E_x}_{=e^x} * \underbrace{\sup E_y}_{=e^y} \leq e^{x+y}.$$

Ok.

2) $e^{x+y} \leq e^x e^y$:

Olkoon $r \in \mathbb{Q}$ $s.e.$ $r < x + y$. Merkitään $\epsilon = (x + y) - r$.

Valitaan $p, q \in \mathbb{Q}$ $s.e. x - \frac{\epsilon}{2} < p < x$ ja $y - \frac{\epsilon}{2} < q < y$ ($\mathbb{Q}$:n tiheys!)

Tällöin

$$p + q > x - \frac{\epsilon}{2} + y - \frac{\epsilon}{2} = x + y - \epsilon = r,$$

joten

$$e^r < e^{p+q} = e^p e^q \leq \sup E_x * \sup E_y = e^x e^y$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup E_{x+y}}_{=e^{x+y}} \leq e^x e^y.$$

Ok. □

Lause 7.5

$f: \mathbb{R} \to]0, \infty[, \qquad f(x) = e^x,$
on aidosti kasvava.

Todistus

Olkoon $x_1 < x_2$. Valitaan $p, q \in \mathbb{Q}$ $s.e.$ $x_1 < p < q < x_2$ (tiheys!).

Tällöin

$$e^{x_1} = \sup E_{x_1} \underset{E_{x_1} \subset E_p}{\leq} \sup E_p \underset{L.2.3}{=} e^p < e^q = \sup E_q \leq \underbrace{\sup E_{x_2}}_{=e^{x_2}}$$

joten

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ok. □

Lemma 7.6

$f(x) = e^x$ on jatkuva pisteessä $x = 0$.

Todistus

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-1}{n}} \quad (Esim. 3.9),$$

on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|e^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \epsilon \;\; ja \;\; \left|e^{\frac{-1}{n}} - 1\right| < \epsilon \;\; kun\, n \geq N.$$

Valitaan $\delta = \frac{1}{N} > 0$. Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}$ joille $|x - 0| < \delta$ pätee

$$\frac{-1}{N} < x < \frac{1}{N},$$

ja siispä

$$e^{-\frac{1}{N}} < e^x < e^{\frac{1}{N}} \quad (L. 7.5).$$

Näin ollen

$$-\epsilon < -\left|e^{\frac{-1}{N}} - 1\right| \leq e^{\frac{-1}{N}} - 1 < e^x - \overset{e^0}{\overset{\parallel}{1}} < e^{\frac{1}{N}} - 1 \leq \left|e^{\frac{1}{N}} - 1\right| < \epsilon$$

kun

$$|x| < \delta, eli \; |e^x - e^0| < \epsilon,$$

kun

$$|x - 0| < \delta.$$

Ok. □

Lause 7.7

$\boxed{f(x) = e^x \text{ on jatkuva koko } \mathbb{R}\text{:}ssä.}$

Todistus

Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Kun $x \in \mathbb{R}$, niin

$$|f(x) - f(a)| = |\underbrace{e^x}_{= e^{x-a+a} = e^{x-a} \cdot e^a} - e^a| = |e^a(e^{x-a} - 1)| = e^a|\underbrace{e^{x-a}}_{=f(x-a)} - \underbrace{1}_{f(0)}|$$

L.7.6 => f jatkuva 0:ssa, joten on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(t) - f(0)| < \frac{\epsilon}{e^a}, aina\ kun\ |t| < s.$$

Mutta jos nyt $|x - a| < \delta$, niin tällöin

$$|f(x-a) - f(0)| < \frac{\epsilon}{e^a},$$

joten

$$|f(x) - f(a)| = e^a|f(x-a) - f(0)| < e^a * \frac{\epsilon}{e^a} = \epsilon.$$

Ok.

Eksponenttifunktio $f\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f(x) = e^x$ on siis aidosti kasvava (ja siten infektio) ja jatkuva.
Lisäksi f on surjektio: $e > 2$

esim. $\lim_{n\to\infty} e^n \geq \lim_{n\to\infty} 2^n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty$

ja

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0\ (vastaavasti)$$

ja Bolzanon lauseen nojalla f saa tällöin kaikki arvot väliltä]0, ∞[.
Siispä f on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio

$f^{-1}\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$,

jota merkitään

$f^{-1}(x) = \log x$

(e-kantainen eli luonnollinen logaritmi).
L.7.1:n nojalla myös logaritmifunktio on aidosti kasvava ja jatkuva. Lisäksi

$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in]0, \infty[$.

(Harj 6.8).