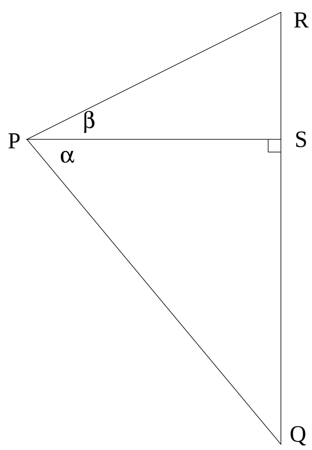
Geometria, kesä 2008
Harjoitus 10, 26.6.2008

1. Todista Cevan lauseen käänteinen versio (monisteen lause 3.1.24) ja totea tämän avulla, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä ja jakavat toisensa suhteessa 2 : 1.

2. Olkoot $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ kulmia, siten, että $(\measuredangle A)^\circ = (\measuredangle B)^\circ + (\measuredangle C)^\circ$. Osoita, että tällöin pätee kaava

$$\cos \measuredangle A = \cos \measuredangle B \, \cos \measuredangle C - \sin \measuredangle B \, \sin \measuredangle C.$$

(Vertaa analyysin kaavaan $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.)
Ohje: Merkitse $\alpha = (\measuredangle B)^\circ$ ja $\beta = (\measuredangle C)^\circ$, jolloin siis $(\measuredangle A)^\circ = \alpha + \beta$. Tutkitaan pelkästään tapausta, jossa $\measuredangle B$ ja $\measuredangle C$ ovat teräviä, jolloin kulmat voidaan asettaa kuten oheisessa kuvassa (miksi?). Käytä kosinilausetta kolmioon $\triangle PQR$, ratkaise tästä $\cos(\alpha + \beta)$ ja käytä Pythagoraan lausetta sopivasti.



3. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde a. Jos B on piste α:n ulkopuolella, niin *pisteen B potenssi ympyrän α suhteen*, $P(B, \alpha)$, määritellään asettamalla $P(B, \alpha) = \overline{AB}^2 - a^2$, ja jos $B \neq A$ on α:n sisäpuolella, niin $P(B, \alpha) = a^2 - \overline{AB}^2$.
Osoita, että pisteen potenssilla on seuraava mielenkiintoinen omimaisuus: Kun l on suora siten, että $B \in l$ ja l leikkaa ympyrää α pisteissä P ja Q, niin $P(B, \alpha) = \overline{BP} \cdot \overline{BQ}$.
(Vihje: Voit katsoa apua monisteesta.)

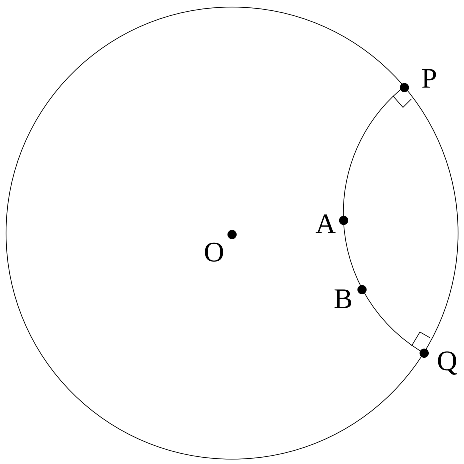
4. Olkoon α ympyrä, ja olkoot $P, Q \in \alpha$ pisteitä, jotka eivät ole samalla α:n halkaisijalla. Konstruoi harpilla ja viivaimella ympyrä, joka kulkee P:n ja Q:n kautta, ja joka on ortogonaalinen α:n kanssa. Miten tämä liittyy Poincarén malliin?

KÄÄNNÄ

5. Piirrä (tai konstruoi) Poincarén mallissa muutamia janoja, joilla on (likimäärin) sama hyperbolinen pituus, mutta jotka ovat (euklidisesti) mahdollisimman erinäköisiä. Saat käyttää kaikkia mahdollisia apuvälineitä, kuten laskinta ja asteikollista viivainta.
Janan AB hyperbolinen pituus on siis sen päätepisteiden hyperbolinen etäisyys, joka määritellään kaavalla

$$d(A,B) = \left| \log \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \right|,$$

missä P ja Q ovat kuten kuvassa, ja janojen pituudet siis euklidisia pituuksia.



6. Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l. Olkoon n pisteen P kautta kulkeva l:n normaali ja Q suorien n ja l leikkauspiste. Tällöin pisteen P etäisyys suorasta l, merkitään $d(P,l)$, määritellään asettamalla $d(P,l) = \overline{PQ}$. (Piirrä kuva!)
Olkoot nyt P ja l kuten yllä, ja olkoon m suora siten, että $P \in m$ ja $m||l$. Osoita, että
(a) euklidisessa geometriassa $d(P,l) = d(R,l)$ *jokaiselle* pisteelle $R \in m$;
(b) hyperbolisessa geometriassa on *korkeintaan yksi* piste $R \in m$, $R \neq P$, jolle $d(P,l) = d(R,l)$.

Oletetaan kahdessa viimeisessä tehtävässä, että voimassa ovat vain neutraalin geometrian aksioomat (H1)-(H13) ja (DA).

7. Olkoot A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla. Olkoon D janojen AB ja BC keskinormaalien leikkauspiste (oletamme siis, että keskinormaalit todella leikkaavat). Osoita, että D on pisteiden A, B ja C kautta kulkevan ympyrän keskipiste, ja että tämä ympyrä on yksikäsitteinen. (Vertaa euklidisen geometrian lauseeseen 3.16). Hahmottele kuva tilanteesta Poincarén mallissa.

8. Oletetaan, että edellisen tehtävän tilanteessa AB:n ja BC:n keskinormaalit eivät leikkaa toisiaan. Kulkeeko pisteiden A, B ja C kautta ympyrää? Hahmottele kuva tilanteesta Poincarén mallissa.