Geometria, kesä 2008
Harjoitus 2, 30.5.2008

Tarkastellaan seuraavaa aksiomaattista järjestelmää, jossa määrittelemättömiä peruskäsitteitä ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*, ja voimassa ovat seuraavat aksioomat:

(A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee niiden kautta.

(A2) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee niiden kautta.

(A3) Jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P, jonka kautta sekä l että m kulkevat.

(A4) On olemassa ainakin yksi suora.

(A5) Jokainen suora kulkee ainakin kolmen pisteen kautta.

(A6) Jos l on suora, niin on olemassa ainakin yksi piste, jonka kautta l ei kulje.

(A7) Jokainen suora kulkee korkeintaan kolmen pisteen kautta.

1. Valitse jokin aksioomista (A1)-(A7) ja osoita, että se on *riippumaton* muista aksioomista konstruoimalla malli, jossa muut aksioomista (A1)-(A7), mutta ei valitsemasi aksiooma, ovat voimassa.

2. Kuten tehtävä 1, mutta nyt jollekin toiselle aksioomalle (A1)-(A7).

3. Kuten tehtävä 2.

Huomio/haaste: Aksioomien (A3) ja (A7) riippumattomaksi osoittaminen on paljon hankalampaa kuin mikään muista. Aksiooman (A7) tapauksessa kannattaa varmaan pohtia *pallogeometriaa*, ts. $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallon pintaa $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ siten, että pisteitä ovat joukot $\{x, -x\}$, missä $x \in S$ (ts. vastakkaiset pisteet samastetaan), ja suoria ovat origon kautta kulkevien tasojen ja S:n leikkaukset (eli isoympyrät).

Huom: Aksioomat (A1)-(A6) muodostavat ns. *elliptisen geometrian* perustan.

4. Osoita, että aksioomajärjestelmä (A1)-(A7) on *ristiriidaton* konstruoimalla malli, jossa kaikki aksioomat ovat voimassa.

5. Todista, että aksioomien (A1)-(A7) ollessa voimassa on olemassa ainakin 7 pistettä. (Lisäkysymys jota ei käsitellä harjoituksissa: Voiko olla enemmän pisteitä?)

KÄÄNNÄ

Nyt unohdamme aksioomat (A1)-(A7) ja palaamme Hilbertin aksioomien pariin.

6. Olkoon l suora, jolla on tasan viisi pistettä, olkoot ne A, B, C, D ja E. Määrittele näille pisteille välissäolot $(*)$ siten, että aksioomat (H4)-(H6) toteutuvat.

7. Totea, että koordinaattigeometria (Malli D luennolla = Malli 5 monisteen sivulla 10) toteuttaa Hilbertin aksioomat (H1)-(H3).

8. Todista Lause 2.3.2.