Geometria, kesä 2008
Harjoitus 3, 3.6.2008

1. Todista Lauseen 2.3.4 kohta: Jos $A * B * C$ ja $A * C * D$, niin $A * B * D$.

2. Todista Lause 2.3.10.
(Voit merkitä tehtävän tehdyksi, jos teet ainakin kaksi kohtaa. Kohdan (iii) todistuksessa voi olla hyötyä seuraavasta tuloksesta: Jos lauseen tilanteessa pätee $F*A*C$ ja $P*A*D$, niin P on kulman $\measuredangle FAE$ sisäpuolella.)

3. Todista, että jos (H1)-(H7) ovat voimassa, niin jokaisella janalla on äärettömän monta pistettä. (vihje: induktio ja Lause 2.3.4 tai 2.3.7)

4. Osoita, että aksiooma (H4) pätee koordinaattigeometriassa eli mallissa D (katso kääntöpuolelle).

Aksioomien (H5)-(H7) voimassaolo mallissa D on (ehkä) helpointa todeta käyttäen apukuvauksia T_b ja R_φ (katso kääntöpuolelle), joiden avulla tarkastelut voi aina palauttaa x-akselille.

5. Piirrä kuva, joka havainnollistaa kuvausten T_b ja R_φ käyttäytymistä (erityisesti suorien kuvautumista). Jos tunnet lineaarialgebraa ja napakoordinaattikuvauksen, niin perustele myös, miksi jokainen mallin D suora l voidaan kuvata sopivien T_b ja R_φ avulla x-akseliksi, eli suoraksi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda(1,0)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Ohje: siirrä ensin l kulkemaan origon kautta ja tee sitten sopiva kierto; tässä voi olla apua ”suuntavektorin” (α, β) napakoordinaattiesityksestä.)

6. Olkoot $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ ja $C = (c, 0)$ pisteitä x-akselilla $\mathbb{R}^2$:ssa (malli D). Osoita, että $A * B * C$ jos ja vain jos $a < b < c$ tai $a > b > c$.

Seuraavissa tehtävissä voit käyttää hyväksi tietoja, että T_b ja R_φ ovat bijektioita, jotka säilyttävät välissäolon. (Ohje: palauta tarkastelut x-akselille ja käytä tehtävää 6.)

7. Osoita, että aksiooma (H5) pätee mallissa D.

8. Osoita, että aksiooma (H6) pätee mallissa D.

Malli D (koordinaattigeometria)

Pisteitä ovat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, suoria joukot

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ja piste P on suoralla l jos $P \in l$. Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ pätee $A * B * C$ jos (ja vain jos) on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\\ (b_1, b_2) &= (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta)\\ (c_1, c_2) &= (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

Apufunktiot T_b ja R_φ

Kun $b \in \mathbb{R}^2$, määritellään tason *siirto* b:n verran

$$T_b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_b(x) = x + b,$$

ja kun $\varphi \in [0, 2\pi[$, määritellään tason *kierto* φ:n verran

$$R_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ R_\varphi(x) = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(tässä siis $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Huomaa, että R_φ todella kiertää tason pisteitä vastapäivään kulman φ verran origon ympäri.

Lineaarialgebran tietojen perusteella T_b ja R_φ ovat bijektioita, jotka kuvaavat $\mathbb{R}^2$:n suorat suoriksi (ts. jos l on suora, niin $T_b(l)$ ja $R_\varphi(l)$ ovat myös suoria). Lisäksi T_b ja R_φ *säilyttävät välissäolon*, ts.

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ T_b(A) * T_b(B) * T_b(C)$$

ja vastaavasti

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ R_\varphi(A) * R_\varphi(B) * R_\varphi(C).$$