Geometria, kesä 2008
Harjoitus 4, 5.6.2008

1. Osoita, että lauseelle 2.4.1 pätee seuraava käänteinen tulos:
Olkoon $\triangle ABC$ kolmio siten, että $\measuredangle B \cong \measuredangle C$. Tällöin $AB \cong AC$.

2. Todista Lause 2.4.2.
(ohje: valitse $\overrightarrow{BC}$:ltä piste P s.e. $BP \cong EF$ ja osoita, että tällöin välttämättä $P = C$.)

3. Todista Lause 2.4.4.

4. Todista Lause 2.4.6.
(vihje: lause 2.4.5)

5. Todista Lause 2.4.7.

Osoitetaan, että myös (H7) pätee malli D:ssä. Seuraava tehtävä antaa pari aputulosta tätä varten. Kääntöpuolella muistutuksena malli D:n määritelmiä sekä apukuvaukset T_b ja R_φ.

6. (a) Olkoot $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ malli D:n eri pisteitä. Osoita, että jana AB on joukko

$$AB = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda[(b_1, b_2) - (a_1, a_2)],\ \lambda \in [0, 1]\big\}.$$

(b) Olkoon suora l mallin D x-akseli ja olkoot $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ malli D:n pisteitä siten, että $a_2, b_2 \neq 0$. Osoita, että ABl jos ja vain jos a_2 ja b_2 ovat samanmerkkiset.

7. Osoita, että aksiooma (H7) pätee mallissa D.
(Ohje: Palauta tilanne jälleen kuvausten T_b ja R_φ avulla sellaiseksi, jossa tarkasteltava suora on x-akseli, ja käytä sitten edellisen tehtävän tuloksia.)

8. Esitä jokin tuntemasi todistus Pythagoraan lauseelle (jos et muista yhtään, niin etsi todistus esim. jostakin oppikirjasta tai vaikka verkosta). Mitä esitietoja ja työkaluja todistuksessa tarvitaan? Millaisia asioita kurssilla siis pitäisi käsitellä ennen kuin voimme todella todistaa Pythagoraan lauseen?

Malli D (koordinaattigeometria)

Pisteitä ovat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, suoria joukot

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ja piste P on suoralla l jos $P \in l$. Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ pätee $A * B * C$ jos (ja vain jos) on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\\ (b_1, b_2) &= (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta)\\ (c_1, c_2) &= (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

Apufunktiot T_b ja R_φ

Kun $b \in \mathbb{R}^2$, määritellään tason *siirto* b:n verran

$$T_b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_b(x) = x + b,$$

ja kun $\varphi \in [0, 2\pi[$, määritellään tason *kierto* φ:n verran

$$R_\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ R_\varphi(x) = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(tässä siis $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Huomaa, että R_φ todella kiertää tason pisteitä vastapäivään kulman φ verran origon ympäri.

Lineaarialgebran tietojen perusteella T_b ja R_φ ovat bijektioita, jotka kuvaavat $\mathbb{R}^2$:n suorat suoriksi (ts. jos l on suora, niin $T_b(l)$ ja $R_\varphi(l)$ ovat myös suoria). Lisäksi T_b ja R_φ *säilyttävät välissäolon*, ts.

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ T_b(A) * T_b(B) * T_b(C)$$

ja vastaavasti

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ R_\varphi(A) * R_\varphi(B) * R_\varphi(C).$$