Geometria, kesä 2008
Harjoitus 5, 10.6.2008

1. Todista lause 2.4.17 (vihje: lause 2.4.16)

2. Todista lause 2.4.18 (vihje: lause 2.4.17, ”normaalin normaali”)

3. Todista lause 2.4.11.

4. Todista lauseen 2.4.12 kohta (ii).
(Kohtaa (i) voi käyttää todistuksessa.)

5. Todista lause 2.4.21.
(ohje: Valitse ensin piste P s.e. $P * A * C$ ja $PA \cong DF$ ja etsi sitten sopivia yhteneviä kolmioita. Muista että kaikki suorat kulmat ovat yhteneviä.)

6. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ joko tason siirto T_b tai kierto R_φ (katso kääntöpuolelle), ja olkoot A ja B mallin D pisteitä. Osoita, että $AB \cong L(A)L(B)$ (eli $||A-B||^2 = ||L(A)-L(B)||^2$); tässä tarvitaan hieman alkeellista lienaarialgebraa.

7. Osoita, että (H8) pätee mallissa D.
(Ohje: Voit aina kuvata puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ positiiviselle x-akselille sopivien kuvausten T_b ja R_φ avulla siten, että A kuvautuu origoon. Tehtävän 6 nojalla riittää siten tarkistaa, että aksiooma toteutuu positiivisella x-akselilla.)

8. Osoita, että (H10) pätee mallissa D.
(Sama ohje kuin edelliseen tehtävään; muista myös että apukuvaukset T_b ja R_φ säilyttävät välissäolon.)

Malli D (koordinaattigeometria)

Pisteitä ovat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, suoria joukot

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ja piste P on suoralla l jos $P \in l$. Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ pätee $A * B * C$ jos (ja vain jos) on olemassa $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ja $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda < \mu < \nu$ tai $\lambda > \mu > \nu$ ja

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)\\ (b_1, b_2) &= (x_0, y_0) + \mu(\alpha, \beta)\\ (c_1, c_2) &= (x_0, y_0) + \nu(\alpha, \beta)\end{aligned}$$

Janojen yhtenevyys mallissa D määritellään tavallisen euklidisen etäisyyden avulla seuraavasti: Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ ja $D = (d_1, d_2)$ (missä $A \neq B$ ja $C \neq D$) pätee $AB \cong CD$ jos (ja vain jos) $||A - B|| = ||C - D||$, eli yhtäpitävästi $||A - B||^2 = ||C - D||^2$, ts.

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2.$$

Tästä nähdään heti, että janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio, eli aksiooma (H9) on voimassa (totea!).

Apufunktiot T_b ja R_φ

Kun $b \in \mathbb{R}^2$, määritellään tason *siirto* b:n verran

$$T_b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_b(x) = x + b,$$

ja kun $\varphi \in [0, 2\pi[$, määritellään tason *kierto* φ:n verran

$$R_\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ R_\varphi(x) = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(tässä siis $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Huomaa, että R_φ todella kiertää tason pisteitä vastapäivään kulman φ verran origon ympäri.

Lineaarialgebran tietojen perusteella T_b ja R_φ ovat bijektioita, jotka kuvaavat $\mathbb{R}^2$:n suorat suoriksi (ts. jos l on suora, niin $T_b(l)$ ja $R_\varphi(l)$ ovat myös suoria). Lisäksi T_b ja R_φ *säilyttävät välissäolon*, ts.

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ T_b(A) * T_b(B) * T_b(C)$$

ja vastaavasti

$$A * B * C \ \text{ jos ja vain jos } \ R_\varphi(A) * R_\varphi(B) * R_\varphi(C).$$