Geometria, kesä 2008
Harjoitus 6, 12.6.2008

1. Antiikin geometrian *kolme klassista ongelmaa* olivat ympyrän neliöinti, kuution kahdentaminen ja kulman kolmijako. Ota selvää mitä näillä tarkoitettiin ja kuinka ongelmat lopulta ratkesivat. (Erityisesti: mitkä olivat ongelmien täsmällisemmät muotoilut ja millä tavalla ne kuului ratkaista.)

2. Todista lause 2.5.11.

3. Todista lause 2.5.20 (vertaa vastaavaan lauseeseen janoille).

4. Olkoon annettuna janat AB, CD ja EF. Milloin voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella kolmio, jonka sivut ovat yhtenevät kyseisten janojen kanssa, ts. kolmio $\triangle PRS$ siten, että $AB \cong PR$, $CD \cong RS$ ja $EF \cong PS$? Toteuta kyseinen harppi-viivain konstruktio joillekin janoille jotka toteuttavat ehtosi.

5. Todista lauseen 2.5.4 todistuksessa tarvittu tieto:
Oletetaan, että pätee $A * B * C$ ja lisäksi O, R_1, R_2 ja S ovat pisteitä siten, että $AB < OR_1$, $BC < OR_2$ ja $O * R_2 * S$ niin että $R_2S \cong OR_1$ Osoita, että tällöin $AC < OS$.
(vihje: katso lauseen 2.5.4 todistusta monisteesta.)

Lopuissa tehtävissä tarkastellaan janojen moninkertojen "laskusääntöjä". Koska näitä tuloksia tarvitaan janamittaan liittyvien lauseiden todistuksissa, on nämä tehtävät tarkoitus tehdä käyttämättä kappaleen 2.5 tuloksia.

6. Olkoot AB ja CD janoja siten, että $AB \cong CD$. Osoita, että $k \cdot AB \cong k \cdot CD$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.
(ohje: induktio k:n suhteen.)

7. Olkoot $k, l \in \mathbb{N}$, PR jana, $A * B * C$, $AB \cong k \cdot PR$ ja $BC \cong l \cdot PR$. Osoita, että $AC \cong (k + l) \cdot PR$. (ohje: pidä esim. k kiinteänä ja tee induktio l:n suhteen.)

8. Olkoon AB jana ja $k, l \in \mathbb{N}$. Osoita, että $(kl) \cdot AB = k \cdot (l \cdot AB)$.
Ohje: Tässä kannattaa pitää l kiinteänä ja tehdä induktio k:n suhteen. Voit myös käyttää tehtävää 7 apuna.