Geometria, kesä 2008
Harjoitus 7, 17.6.2008

1. Todista lause 2.5.23.

2. Nelikulmio $\square ABCD$ on *puolisuunnikas* jos $\overleftrightarrow{AD} || \overleftrightarrow{BC}$. Osoita, että puolisuunnikkaan $\square ABCD$ kärki A on kulman $\measuredangle BCD$ sisäpuolella.
(Huom: merkintöjä vaihtamalla huomataan, että vastaava pätee itse asiassa jokaiselle puolisuunnikkaan kärjelle, ts. jokainen kärki on vastakkaisen kulman sisäpuolella.)

3. Keksi esimerkki nelikulmiosta $\square ABCD$, jossa edellisen tehtävän väite ei päde.
Kuva riittää.

4. Olkoon $\square ABCD$ suorakulmio. Osoita, että $AB \cong CD$ ja $BC \cong AD$.
(Ohje: Totea ensin, että suorakulmio on puolisuunnikas, joten tehtävän 2 havainto on voimassa. Käytä Saccheri-Legendren lausetta kolmioille, jotka saadaan suorakulmion *lävistäjien* AC ja BD avulla, ja laske, että syntyvät vuorokulmat ovat yhtenevät.)

5. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio, jossa kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat suoria ja $AD \cong BC$. Osoita, että tällöin $\measuredangle C \cong \measuredangle D$. Voidaanko tästä päätellä, että $\square ABCD$ on suorakulmio?

6. Todista lause 2.6.4 erikoistapauksessa, jossa kolmio $\triangle ABC$ on suorakulmainen. Tarkemmin: Olkoon $\triangle ABC$ kolmio jossa $\measuredangle ABC$ on suora kulma, ja olkoon lisäksi D piste siten, että $B * D * C$. Osoita, että tällöin $\overline{AD} < \max\{\overline{AC}, \overline{AB}\}$.
(Huom: Yleinen tapaus lauseesta 2.6.4 voidaan todistaa käyttämällä tätä erikoistapausta apuna. Keksitkö mikä on idea?)

7. Todista lause 2.6.5.
(Vihje: Tässä kannattaa tutkia erikseen pari tapausta. Lause 2.6.4 auttaa ainakin joissakin tapauksissa.)

8. Palauta mieleesi Eukleideen aksioomat (EA1)-(EA4) ja totea, että ne ovat voimassa järjestelmässä joka toteutaa Hilbertin aksioomat (H1)-(H13).
(Huom: (EA3):n sisältö pitää nyt tulkita jollakin sopivalla tavalla, olemmehan *määritelleet* ympyrän tietyksi joukoksi, joten se on kyllä *olemassa.* Mikä olisi siis sopiva tulkinta tälle aksioomalle?)