Geometria, kesä 2008
Harjoitus 8, 19.6.2008

1. Osoita, että jos jossakin aksioomat (H1)-(H13) ja (AA) toteuttavassa järjestelmässä *jokaisen* kolmion defekti on sama luku $a \geq 0$, niin välttämättä $a = 0$.

2. Todista lause 2.6.8.

3. Todista lause 2.6.9.

4. Oletetaan, että voimassa ovat (H1)-(H13), (DA) ja (EA5).
Osoita, että tällöin (PAR) pätee.
(Ohje: Oleta, että (PAR) ei päde, jolloin jonkin pisteen kautta kulkee kaksi yhdensuuntaista jollekin suoralle. Huomaa, että näistä toinen ei voi olla "normaalin normaali". Johda ristiriita (EA5):n avulla.)

5. Osoita, että (PAR) on voimassa malli D:ssä.

6. Tarkastellaan seuraavaa paralleeliaksiooman todistusyritystä:

Olkoon l suora ja P piste l:n ulkopuolelta. Olkoon t pisteen P kautta kulkeva l:n normaali, ja olkoon Q suorien l ja t leikkauspiste. Olkoon m pisteen P:n kautta kulkeva t:n normaali, jolloin siis $m||l$. Olkoon sitten $n \neq m$ jokin toinen P:n kautta kulkeva suora, jolloin pitää siis osoittaa, että $n \nparallel l$.

Valitaan suoralta n piste A siten, että AQm. Valitaan sitten kaikille $k \in \mathbb{N}$ piste $A_k \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $\overline{PA_k} = k$. Olkoon u_k pisteen A_k kautta kulkeva suoran t normaali, ja olkoon B_k suorien u_k ja t leikkauspiste. Kun nyt $k \to \infty$, niin $\overline{PA_k} \to \infty$, jolloin myös $\overline{PB_k} \to \infty$. Tällöin riittävän suurelle $k \in \mathbb{N}$ pätee $\overline{PB_k} > \overline{PQ}$, jolloin $P * Q * B_k$ ja siispä $B_k l P$. Koska $u_k || l$, niin $A_k B_k l$, ja siten myös $A_k l P$, ts. jana $A_k P$ leikkaa suoraa l. Niinpä myös suora n leikkaa suoraa l, joten $n \nparallel l$, ja näinollen paralleeliaksiooma on todistettu(?).

Piirrä tilannetta havainnollistava kuva ja mieti mikä menee pieleen.

7. Todista lause/seuraus 3.5.
(vihje: lauseet 3.2 ja 3.4.)

8. Todista lause 3.6.