Geometria, kesä 2008
Harjoitus 9, 24.6.2008

1. Käy läpi Legendren todistus(yritys) paralleeliaksioomalle (monisteen alussa), ja perustele epäselvistä kohdista (1)–(10) ne, jotka nyt pystytään perustelemaan aksioomista (H1)-(H13) ja (DA) lähtien. Mikä kohta jää perustelematta? Voit myös piirtää esim. luennolla esitellyn Kleinin mallin avulla kuvan, jossa näkyy ettei kyseinen kohta päde ilman paralleeliaksioomaa.
(Huom: Monisteessa on kohdassa (3) pieni virhe, sillä pisteiden P ja Q olemassaolo ei ole ongelma, mutta tässä pitäisi kysyä voidaanko P' ja P'' valita halutulla tavalla.)

2. Olkoon α ympyrä ja P piste. Konstruoi harpilla ja viivaimella α:lle pisteen P kautta kulkeva tangentti, kun
(a) $P \in \alpha$
(b) P on α:n ulkopuolella (vihje: Thales!)

3. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on "hukassa" (ts. sitä ei alunperin tunneta). Miten keskipiste löytyy harpin ja viivaimen avulla?

4. Todista (esim. sinilauseen avulla) seuraava *kulmanpuolittajalause*:
Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen pituuksien suhteessa, ts. jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * C$ ja $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\measuredangle A$ puolittaja, niin

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

5. Osoita, että jos $\measuredangle A \cong \measuredangle B$, niin $\sin \measuredangle A = \sin \measuredangle B$ ja $\cos \measuredangle A = \cos \measuredangle B$.

6. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \quad \text{ja} \quad \measuredangle A \cong \measuredangle D.$$

Osoita, että tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
(Vihje: kosinilause.)

7. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, ja olkoot D, E ja F sivujen BC, AC ja AB keskipisteet (vastaavassa järjestyksessä). Osoita, että tällöin $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

8. Todista seuraava käänteinen versio Thaleen lauseelle:
Olk. $\measuredangle ABC$ suora kulma. Tällöin AC on kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, ts. janan AC keskipiste O on myös tämän ympyrän keskipiste.
(Ohje: riittää siis osoittaa, että $\overline{OB} = \overline{OA}$.
Vihje: ks. moniste)

Kääntöpuolelle koottu kurssin keskeisiä asioita

Kurssin keskeisiä asioita:

1. Aksiomaattinen menetelmä, aksioomien ristiriidattomuus ja riippumattomuus, määrittelemättömät peruskäsitteet, mallien merkitys aksioomajärjestelmille.

2. Yleinen idea: miten aksioomista (H1)-(H13), (AA) ja (DA) lähtien rakennetaan pieni pala kerrallaan käyttökelpoista geometriaa, ja mitä uusia mahdollisuuksia kukin aksiooma tuo tullessaan. Erityisesti osattava **määritelmät**.

2.2-2.4. Osattava suoraviivaisia todistuksia aksioomista lähtien (vrt. 2.2.1-2.2.4, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.3.6, 2.3.9, 2.4.1, 2.4.2), tunnettava ja osattava käyttää keskeisiä lauseita (esim. puomilause, ristikulmat, vuorokulmat, kolmioiden yhtenevyyslauseet, normaalit ja yhdensuuntaiset).

2.5. Tiedettävä miten jana ja kulma puolitetaan, tunnettava jana- ja kulmamitan konstruktion idea, ei yksityiskohtia. Tunnettava jana- ja kulmamittaan liittyvät keskeiset lauseet, esim. additiivisuus, kolmioepäyhtälö, täydennyskulmat. Tiedettävä neutraalin geometrian tärkeimpien lauseiden 2.5.22, 2.5.25 ja 2.5.26 sisällöt ja todistusten keskeiset ideat, ei kuitenkaan yksityiskohtia.

2.6. Osattava ympyröihin liittyvät määritelmät, tangentti, keskinormaali ja tunnettava näihin liittyvät lauseet.

3. Tunnettava euklidisen geometrian keskeisiä lauseita: käänteiset vuorokulmat, kulmasumma, yhdensuuntaisprojektiot (3.9), samanmuotoisuus, Pythagoras, sini- ja kosinilauseet, kehäkulmalauseet. Ymmärrettävä sinin ja kosinin sekä kolmion alan määritelmät. Tunnettava myös todistusten ideoita, mutta ei esim. 3.9:n tai kehäkulmalauseen todistusten yksityiskohtia.

4. Tiedettävä euklidisen ja hyperbolisen geometrian keskeisimpiä eroja (liittyen esim. hyp. geometrian peruslauseisiin), ymmärrettävä Poincarén mallin idea, eli miltä asiat ”näyttävät” Poincarén mallissa.

Tentistä:

- Tenttipaperissa annetaan tarvittavat aksioomat (H1)-(H13), (AA), (DA) ja (PAR)/(HYP).
- Koordinaattigeometriaan littyviä (lasku)tehtäviä ei tule tenttiin. (On kuitenkin tiedettävä, että koordinaattigeometria on malli euklidiselle geometrialle).
- Osattava perustellen yksinkertaisia harppi-viivain konstruktioita (vrt. harjoitukset).