Hardyn epäyhtälöitä euklidisissa avaruuksissa

Juha Lehrbäck

Jyväskylän yliopisto

Matematiikan päivät 2010, 4.1.2010, Jyväskylä

Alkuperäinen epäyhtälö

G.H. Hardy osoitti vuonna 1925, että epäyhtälö

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,dx$$

pätee aina, kun $f \geq 0$ on mitallinen funktio ja $1 < p < \infty$.

Alkuperäinen epäyhtälö

G.H. Hardy osoitti vuonna 1925, että epäyhtälö

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,dx$$

pätee aina, kun $f \ge 0$ on mitallinen funktio ja $1 < p < \infty$.

Epäyhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\int_0^\infty |u(x)|^p\, x^{-p}\,dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p\,dx,$$

missä u on absoluuttisesti jatkuva ja $u(0) = 0$.

Yleistys avaruuteen $\mathbb{R}^n$

Hardyn epäyhtälö

$$\int_0^\infty |u(x)|^p \, x^{-p} \, dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p \, dx$$

voidaan yleistää korkeampiulotteiseen tilanteeseen esimerkiksi näin:

Yleistys avaruuteen $\mathbb{R}^n$

Hardyn epäyhtälö

$$\int_0^\infty |u(x)|^p \, x^{-p} \, dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p \, dx$$

voidaan yleistää korkeampiulotteiseen tilanteeseen esimerkiksi näin:

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{-p} \, dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx,$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin osajoukko, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $d_\Omega(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ on pisteen $x \in \Omega$ etäisyys Ω:n reunasta.

Milloin epäyhtälö on voimassa?

Toisin kuin $\mathbb{R}$:ssä (missä $\Omega = [0, \infty)$ tai $\Omega = [a, b]$), ei kaikissa alueissa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ löydy vakiota $C > 0$ siten, että epäyhtälö

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{-p} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$$

olisi voimassa tällä vakiolla $C > 0$ kaikille sileille testifunktioille $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Milloin epäyhtälö on voimassa?

Toisin kuin $\mathbb{R}$:ssä (missä $\Omega = [0, \infty)$ tai $\Omega = [a, b]$), ei kaikissa alueissa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ löydy vakiota $C > 0$ siten, että epäyhtälö

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{-p} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$$

olisi voimassa tällä vakiolla $C > 0$ kaikille sileille testifunktioille $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Toisaalta tämä Hardyn p-epäyhtälö on kuitenkin voimassa ainakin tarpeeksi 'siisteissä' alueissa:

Milloin epäyhtälö on voimassa?

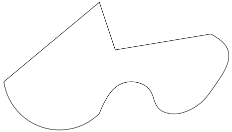
Toisin kuin $\mathbb{R}$:ssä (missä $\Omega = [0, \infty)$ tai $\Omega = [a, b]$), ei kaikissa alueissa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ löydy vakiota $C > 0$ siten, että epäyhtälö

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{-p} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx$$

olisi voimassa tällä vakiolla $C > 0$ kaikille sileille testifunktioille $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Toisaalta tämä Hardyn p-epäyhtälö on kuitenkin voimassa ainakin tarpeeksi 'siisteissä' alueissa:

Lause (Nečas 1962)

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu Lipschitz-alue, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö kaikille $1 < p < \infty$.



Milloin epäyhtälö on voimassa: tasainen paksuus

Nečasin tulos on erikoistapaus seuraavasta Lauseesta:

Milloin epäyhtälö on voimassa: tasainen paksuus

Nečasin tulos on erikoistapaus seuraavasta Lauseesta:

Lause (Ancona 1986 ($p = 2$), Lewis 1988, Wannebo 1990)

Jos $1 < p < \infty$ ja alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ on tasaisesti p-paksu, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö.

Milloin epäyhtälö on voimassa: tasainen paksuus

Nečasin tulos on erikoistapaus seuraavasta Lauseesta:

Lause (Ancona 1986 ($p = 2$), Lewis 1988, Wannebo 1990)

Jos $1 < p < \infty$ ja alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ on tasaisesti p-paksu, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö.

Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on tasaisesti p-paksu, jos (ja vain jos) löytyy $\lambda > n - p$ siten, että E toteuttaa tasaisen λ-ulotteisen tiheysehdon

$$\mathcal{H}^\lambda_\infty\big(E \cap B(w,r)\big) \geq C r^\lambda \quad \text{kaikilla } w \in E \text{ ja kaikilla } r > 0.$$

Milloin epäyhtälö on voimassa: tasainen paksuus

Nečasin tulos on erikoistapaus seuraavasta Lauseesta:

Lause (Ancona 1986 ($p = 2$), Lewis 1988, Wannebo 1990)

Jos $1 < p < \infty$ ja alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ on tasaisesti p-paksu, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö.

Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on tasaisesti p-paksu, jos (ja vain jos) löytyy $\lambda > n - p$ siten, että E toteuttaa tasaisen λ-ulotteisen tiheysehdon

$$\mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}\big(E \cap B(w,r)\big) \geq Cr^{\lambda} \quad \text{kaikilla } w \in E \text{ ja kaikilla } r > 0.$$

Tässä $\mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}$ on Hausdorffin λ-sisältö,

$$\mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\lambda} : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(z_i, r_i) \right\}.$$

Tasaisesti paksuja joukkoja

Esimerkiksi piste on tasaisesti p-paksu kun $p > n$, suora on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 1$, avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ taso on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 2$ ja niin edelleen.
Lisäksi rajoitetun Lipschitz-alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti Ω^c on tasaisesti p-paksu kaikille $1 < p < \infty$.

Tasaisesti paksuja joukkoja

Esimerkiksi piste on tasaisesti p-paksu kun $p > n$, suora on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 1$, avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ taso on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 2$ ja niin edelleen.
Lisäksi rajoitetun Lipschitz-alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti Ω^c on tasaisesti p-paksu kaikille $1 < p < \infty$.
Siis:

pienempi p $\leftrightarrow$ paksumpi joukko

Tasaisesti paksuja joukkoja

Esimerkiksi piste on tasaisesti p-paksu kun $p > n$, suora on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 1$, avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ taso on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 2$ ja niin edelleen.
Lisäksi rajoitetun Lipschitz-alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti Ω^c on tasaisesti p-paksu kaikille $1 < p < \infty$.
Siis:

pienempi p $\leftrightarrow$ *paksumpi joukko*

Tasainen p-paksuus määritellään varsinaisesti joukon *p-kapasiteetin* avulla, missä siis $1 \leq p < \infty$. Tämä vastaa tiheysehtoa eksponenteilla $0 \leq \lambda \leq n - 1$.

Tasaisesti paksuja joukkoja

Esimerkiksi piste on tasaisesti p-paksu kun $p > n$, suora on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 1$, avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ taso on tasaisesti p-paksu kun $p > n - 2$ ja niin edelleen.
Lisäksi rajoitetun Lipschitz-alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti Ω^c on tasaisesti p-paksu kaikille $1 < p < \infty$.
Siis:

pienempi p $\leftrightarrow$ paksumpi joukko

Tasainen p-paksuus määritellään varsinaisesti joukon *p-kapasiteetin* avulla, missä siis $1 \leq p < \infty$. Tämä vastaa tiheysehtoa eksponenteilla $0 \leq \lambda \leq n - 1$.
Tiheysehto on kuitenkin järkevä myös kun $n - 1 \leq \lambda \leq n$;
tähän palataan myöhemmin.

Painotetut epäyhtälöt

Hardyn (p, β)-epäyhtälö saadaan, kun p-epäyhtälön molemmille puolille lisätään painofunktio $d_\Omega(x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x) \quad ^{-p} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \qquad\qquad dx\,.$$

Painotetut epäyhtälöt

Hardyn (p, β)-epäyhtälö saadaan, kun p-epäyhtälön molemmille puolille lisätään painofunktio $d_\Omega(x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{\beta - p} \, dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p d_\Omega(x)^\beta \, dx \, .$$

Painotetut epäyhtälöt

Hardyn (p,β)-epäyhtälö saadaan, kun p-epäyhtälön molemmille puolille lisätään painofunktio $d_\Omega(x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{\beta-p} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p d_\Omega(x)^\beta \, dx \, .$$

Nečas esitti tuloksensa itse asiassa juuri painotetuille epäyhtälöille:

Lause (Nečas 1962)

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu Lipschitz-alue ja $1 < p < \infty$, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö kaikille $\beta < p-1$.

Painotetut epäyhtälöt

Hardyn (p,β)-epäyhtälö saadaan, kun p-epäyhtälön molemmille puolille lisätään painofunktio $d_\Omega(x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{\beta-p} \, dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p d_\Omega(x)^\beta \, dx \, .$$

Nečas esitti tuloksensa itse asiassa juuri painotetuille epäyhtälöille:

Lause (Nečas 1962)

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu Lipschitz-alue ja $1 < p < \infty$, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö kaikille $\beta < p - 1$.

Sivuhuomautus: Nečasin lause ja ALW-tulos sisältyvät erikoistapauksina seuraavaan (melko helposti todistettavaan) lauseeseen

Painotetut epäyhtälöt

Hardyn (p,β)-epäyhtälö saadaan, kun p-epäyhtälön molemmille puolille lisätään painofunktio $d_\Omega(x)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, d_\Omega(x)^{\beta-p} \, dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p d_\Omega(x)^\beta \, dx \, .$$

Nečas esitti tuloksensa itse asiassa juuri painotetuille epäyhtälöille:

Lause (Nečas 1962)

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu Lipschitz-alue ja $1 < p < \infty$, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö kaikille $\beta < p - 1$.

Sivuhuomautus: Nečasin lause ja ALW-tulos sisältyvät erikoistapauksina seuraavaan (melko helposti todistettavaan) lauseeseen

Lause (L. 2010)

Jos Ω^c on tasaisesti q-paksu kaikille $q > s \ge 1$, niin Ω:ssa on voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö aina kun $1 < p < \infty$ ja $\beta < p - s$.

Edelliset tulokset voidaan ilmaista tiheysehdon avulla seuraavasti:

Edelliset tulokset voidaan ilmaista tiheysehdon avulla seuraavasti:

ALW: Ω^c λ-tiheä $\implies$ Ω:ssa p-Hardy kun $p - n + \lambda > 0$ (eli $p > n - \lambda$)

Painotetut epäyhtälöt ja tiheysehto

Edelliset tulokset voidaan ilmaista tiheysehdon avulla seuraavasti:

ALW: Ω^c λ-tiheä $\implies$ Ω:ssa p-Hardy kun $p - n + \lambda > 0$ (eli $p > n - \lambda$)

Yleistys: Ω^c λ-tiheä, $\lambda \leq n - 1$ $\implies$ Ω:ssa (p, β)-Hardy kun $\beta < p - n + \lambda$ (tässä siis $1 < p < \infty$)

Edelliset tulokset voidaan ilmaista tiheysehdon avulla seuraavasti:

ALW: Ω^c λ-tiheä $\implies$ Ω:ssa p-Hardy kun $p - n + \lambda > 0$ (eli $p > n - \lambda$)

Yleistys: Ω^c λ-tiheä, $\lambda \leq n - 1$ $\implies$ Ω:ssa (p, β)-Hardy kun $\beta < p - n + \lambda$ (tässä siis $1 < p < \infty$)

Yleistys ei päde tässä muodossa, jos ehto $\lambda \leq n - 1$ poistetaan.

Vastaesimerkki: $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$
komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ on λ-tiheä kaikilla $0 \leq \lambda \leq n$, mutta (p, β)-Hardy on voimassa vain kun $\beta < p - 1$ (eikä $\beta < p$).

Painotetut epäyhtälöt ja tiheysehto

Edelliset tulokset voidaan ilmaista tiheysehdon avulla seuraavasti:

ALW: Ω^c λ-tiheä $\implies$ Ω:ssa p-Hardy kun $p - n + \lambda > 0$ (eli $p > n - \lambda$)

Yleistys: Ω^c λ-tiheä, $\lambda \leq n - 1$ $\implies$ Ω:ssa (p, β)-Hardy kun $\beta < p - n + \lambda$ (tässä siis $1 < p < \infty$)

Yleistys ei päde tässä muodossa, jos ehto $\lambda \leq n - 1$ poistetaan.

Vastaesimerkki: $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$
komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ on λ-tiheä kaikilla $0 \leq \lambda \leq n$, mutta (p, β)-Hardy on voimassa vain kun $\beta < p - 1$ (eikä $\beta < p$).
Oikeastaan oleellista onkin alueen *reunan* tiheys, mutta tämäkään ei yksin riitä (Koskela-L, 2009).

Riittävä ehto kun $n - 1 \leq \lambda \leq n$

Jos alueen *reuna* toteuttaa λ-tiheysehdon lisäksi 'saavutettavuusehdon', saadaan yleistys myös eksponenteille $\lambda > n - 1$:

Riittävä ehto kun $n-1 \leq \lambda \leq n$

Jos alueen *reuna* toteuttaa λ-tiheysehdon lisäksi 'saavutettavuusehdon', saadaan yleistys myös eksponenteille $\lambda > n-1$:

Lause (Koskela-L., 2009)

Jos $\partial\Omega$ toteuttaa ehdon

$$\mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}(v_x(c)\text{–}\partial\Omega) \geq C d_\Omega(x)^\lambda \qquad \textit{kaikilla } x \in \Omega, \tag{1}$$

niin Ω:ssa on (p,β)-Hardy kun $\beta < p-n+\lambda$.

Tässä $v_x(c)$–$\partial\Omega$ on 'pisteeseen $x \in \Omega$ näkyvä osa reunasta $\partial\Omega$', eli niiden pisteiden $w \in \partial\Omega$ joukko, jotka voidaan yhdistää x:ään c-John -käyrän avulla.

Riittävä ehto kun $n - 1 \leq \lambda \leq n$

Jos alueen *reuna* toteuttaa λ-tiheysehdon lisäksi 'saavutettavuusehdon', saadaan yleistys myös eksponenteille $\lambda > n - 1$:

Lause (Koskela-L., 2009)

Jos $\partial\Omega$ toteuttaa ehdon

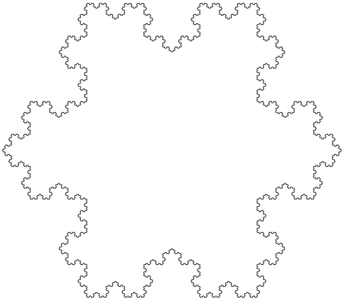
$$\mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}(v_x(c)\text{–}\partial\Omega) \geq C d_{\Omega}(x)^{\lambda} \qquad \textit{kaikilla } x \in \Omega, \tag{1}$$

niin Ω:ssa on (p, β)-Hardy kun $\beta < p - n + \lambda$.

Tässä $v_x(c)$–$\partial\Omega$ on 'pisteeseen $x \in \Omega$ näkyvä osa reunasta $\partial\Omega$', eli niiden pisteiden $w \in \partial\Omega$ joukko, jotka voidaan yhdistää x:ään c-John -käyrän avulla.

Keskeinen työkalu Lauseen todistuksessa on John-käyriä hyödyntävä ketjutusargumentti, jonka avulla todistetaan ensin ns. pisteittäinen Hardyn epäyhtälö kaikille $x \in \Omega$.

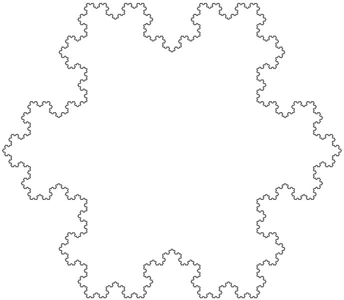
Esimerkit



Tässä reuna on λ-tiheä
($1 < \lambda < 2$) ja hyvin näkyvissä
alueen sisälle
$\Rightarrow$ (p, β)-Hardy kaikille

$$\beta < \underbrace{p - n + \lambda}_{> p-1}$$

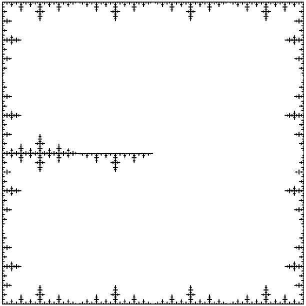
Esimerkit



Tässä reuna on λ-tiheä ($1 < \lambda < 2$) ja hyvin näkyvissä alueen sisälle

$\Rightarrow$ (p, β)-Hardy kaikille

$$\beta < \underbrace{p - n + \lambda}_{> p-1}$$



Tässä reuna on λ-tiheä ($1 < \lambda < 2$), mutta keskellä olevan antennin yläpuolella näkyvä osa reunasta onkin vain 1-ulotteinen

$\Rightarrow$ (p, β)-Hardy ei päde kun

$$\beta = p - 1 < p - n + \lambda$$

Ohutta ja paksua reunaa

Jos alueen Ω komplementti (tai reuna) sisältää osan, jonka dimensio on μ, ei Ω:ssa voi päteä $(p, p - n + \mu)$-Hardy.
(Koskela-Zhong 2003, $\beta = 0$ eli $p = n - \mu$), (L. 2008)

Ohutta ja paksua reunaa

Jos alueen Ω komplementti (tai reuna) sisältää osan, jonka dimensio on μ, ei Ω:ssa voi päteä $(p, p - n + \mu)$-Hardy.
(Koskela-Zhong 2003, $\beta = 0$ eli $p = n - \mu$), (L. 2008)

Jos komplementti on lisäksi μ-tiheä (ja $\mu \leq n - 1$), on Ω:ssa voimassa (p, β)-Hardy kaikilla $\beta < p - n + \mu$.

Ohutta ja paksua reunaa

Jos alueen Ω komplementti (tai reuna) sisältää osan, jonka dimensio on μ, ei Ω:ssa voi päteä $(p, p - n + \mu)$-Hardy.
(Koskela-Zhong 2003, $\beta = 0$ eli $p = n - \mu$), (L. 2008)

Jos komplementti on lisäksi μ-tiheä (ja $\mu \leq n - 1$), on Ω:ssa voimassa (p, β)-Hardy kaikilla $\beta < p - n + \mu$.

Toisaalta, jos Ω:n reuna sisältää myös λ-tiheän osan, missä $\lambda > \mu$, voi (p, β)-Hardy olla voimassa joillekin $\beta > p - n + \mu$
(L. 2008).

Ohutta ja paksua reunaa

Jos alueen Ω komplementti (tai reuna) sisältää osan, jonka dimensio on μ, ei Ω:ssa voi päteä $(p, p-n+\mu)$-Hardy.
(Koskela-Zhong 2003, $\beta = 0$ eli $p = n - \mu$), (L. 2008)

Jos komplementti on lisäksi μ-tiheä (ja $\mu \leq n-1$), on Ω:ssa voimassa (p,β)-Hardy kaikilla $\beta < p - n + \mu$.

Toisaalta, jos Ω:n reuna sisältää myös λ-tiheän osan, missä $\lambda > \mu$, voi (p,β)-Hardy olla voimassa joillekin $\beta > p - n + \mu$
(L. 2008).

Tällöin eksponenttien $\beta > p - n + \mu$ kannalta μ-ulotteiset reunan osat ovat 'liian pieniä' ja ne voi jättää huomiotta, kun näkyvissä on paksumpaa λ-ulotteista reunaa.

Ohutta ja paksua reunaa: esimerkki

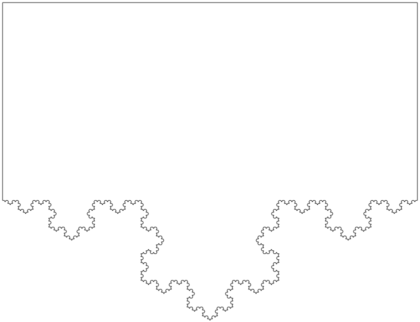
Esimerkiksi oheisen kuvan tasoalueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on voimassa Hardyn (p, β)-epäyhtälö kun

$\beta < p - 1$

tai

$p - 1 < \beta < p - 2 + \lambda,$

missä $\lambda > 1$ on alareunan lumihiutalekäyrän dimensio.



Ohutta ja paksua reunaa: esimerkki

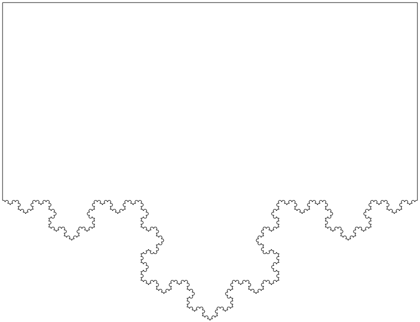
Esimerkiksi oheisen kuvan tasoalueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on voimassa Hardyn (p, β)-epäyhtälö kun

$$\beta < p - 1$$

tai

$$p - 1 < \beta < p - 2 + \lambda,$$

missä $\lambda > 1$ on alareunan lumihiutalekäyrän dimensio.

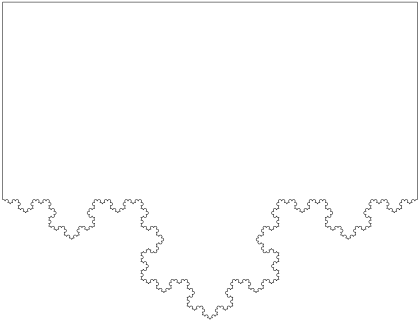


Arvo $\beta = p - 1 = p - 2 + 1$ ei ole mahdollinen, sillä alueen reuna sisältää 1-ulotteisen osan.

Eksponentit $p - 1 < \beta < p - 2 + \lambda$ kelpaavat, sillä näille yksiulotteiset osat ovat 'liian pieniä', kun näkyvissä on paksumpaa reunaa (ts. lumihiutalekäyrä).

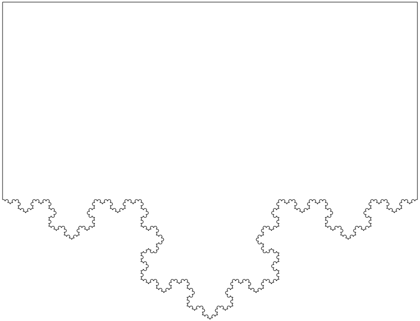
Pelkkä paksuus ei riitä

Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä:



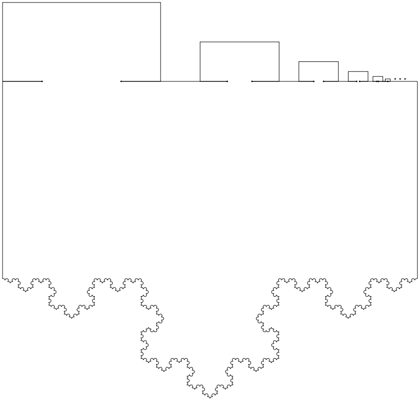
Pelkkä paksuus ei riitä

Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä: Lisätään edellisen esimerkin alueen yläreunaan pieniä 'huoneita', joiden 'ovet' pienenevät nopeammin kuin huoneen koko.



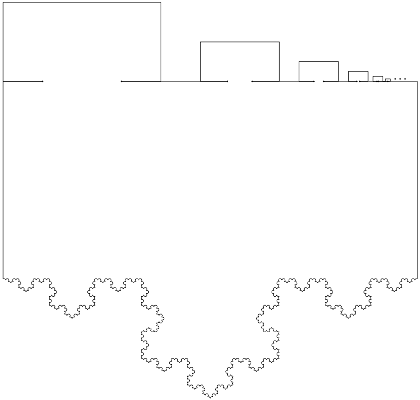
Pelkkä paksuus ei riitä

Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä: Lisätään edellisen esimerkin alueen yläreunaan pieniä 'huoneita', joiden 'ovet' pienenevät nopeammin kuin huoneen koko.

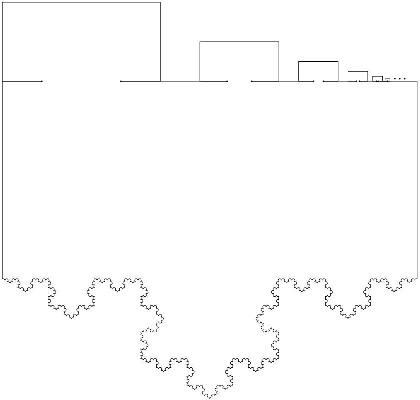


Pelkkä paksuus ei riitä

Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä: Lisätään edellisen esimerkin alueen yläreunaan pieniä 'huoneita', joiden 'ovet' pienenevät nopeammin kuin huoneen koko. Tässä alueessa EI PÄDE (p, β)-epäyhtälö millekään $\beta \geq p - 1$.



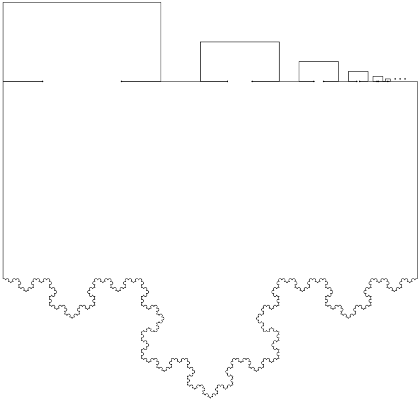
Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä: Lisätään edellisen esimerkin alueen yläreunaan pieniä 'huoneita', joiden 'ovet' pienenevät nopeammin kuin huoneen koko. Tässä alueessa EI PÄDE (p, β)-epäyhtälö millekään $\beta \geq p-1$.



(ilman 'huoneita' epäyhtälö oli siis voimassa myös kun $p-1 < \beta < p-2+\lambda$.)

Pelkkä paksuus ei riitä

Paksun reunan olemassaolo ei kuitenkaan aina riitä: Lisätään edellisen esimerkin alueen yläreunaan pieniä 'huoneita', joiden 'ovet' pienenevät nopeammin kuin huoneen koko. Tässä alueessa EI PÄDE (p, β)-epäyhtälö millekään $\beta \geq p-1$.



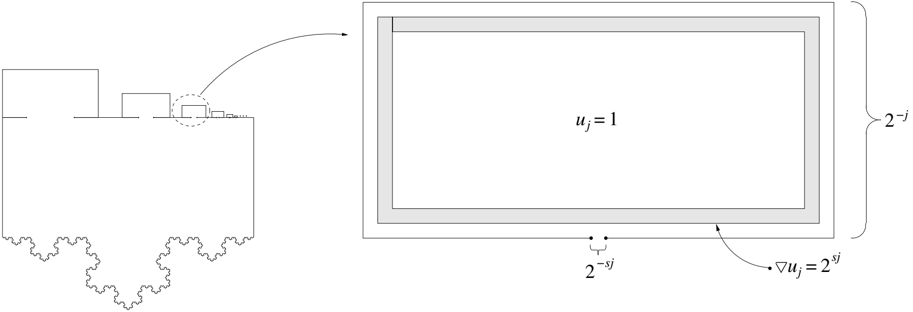
(ilman 'huoneita' epäyhtälö oli siis voimassa myös kun $p-1 < \beta < p-2+\lambda$.)
Oleellista on se, että ohuen reunan läheltä ei aina päästä John-käyrien avulla kohtaan, josta paksu reuna näkyy hyvin.

Vastaesimerkkifunktiot

Osoitetaan, ettei epäyhtälö päde, kun $\beta > p - 1$. (Arvon $\beta = p - 1$ mahdottomuus seuraa tällöin Hardyn epäyhtälöiden 'itseparantuvuusominaisuuksista'.)

Vastaesimerkkifunktiot

Osoitetaan, ettei epäyhtälö päde, kun $\beta > p - 1$. (Arvon $\beta = p - 1$ mahdottomuus seuraa tällöin Hardyn epäyhtälöiden 'itseparantuvuusominaisuuksista'.)
Olkoon j:nnen huoneen seinän pituus 2^{-j} ja oven leveys 2^{-sj}, missä $s > 1$. Määritellään kuvan mukaiset funktiot $u_j \colon \Omega \to \mathbb{R}$.



Lasku

Tällöin

$$\int |u_j|^p d_\Omega^{\beta-p} \gtrsim 2^{-2j} 2^{-j(\beta-p)} = 2^{-j(2-p+\beta)}$$

ja

$$\int |\nabla u_j|^p d_\Omega^{\beta} \lesssim 2^{-sj} 2^{-j} 2^{sjp} 2^{-js\beta} = 2^{-js(1-p+\beta)},$$

Lasku

Tällöin

$$\int |u_j|^p d_\Omega^{\beta-p} \gtrsim 2^{-2j} 2^{-j(\beta-p)} = 2^{-j(2-p+\beta)}$$

ja

$$\int |\nabla u_j|^p d_\Omega^{\beta} \lesssim 2^{-sj} 2^{-j} 2^{sjp} 2^{-js\beta} = 2^{-js(1-p+\beta)},$$

joten

$$\frac{\int |u_j|^p {d_\Omega}^{\beta-p}}{\int |\nabla u_j|^p {d_\Omega}^{\beta}} \gtrsim \frac{2^{-j(2-p+\beta)}}{2^{-js(1-p+\beta)} 2^{-j}} = 2^{-j(1-p+\beta)(1-s)} \xrightarrow{j\to\infty} \infty,$$

sillä $(1-p+\beta)(1-s) < 0$, kun $s > 1$ ja $\beta > p-1$.

Tällöin

$$\int |u_j|^p d_\Omega^{\beta-p} \gtrsim 2^{-2j} 2^{-j(\beta-p)} = 2^{-j(2-p+\beta)}$$

ja

$$\int |\nabla u_j|^p d_\Omega^{\beta} \lesssim 2^{-sj} 2^{-j} 2^{sjp} 2^{-js\beta} = 2^{-js(1-p+\beta)},$$

joten

$$\frac{\int |u_j|^p d_\Omega{}^{\beta-p}}{\int |\nabla u_j|^p d_\Omega{}^{\beta}} \gtrsim \frac{2^{-j(2-p+\beta)}}{2^{-js(1-p+\beta)} 2^{-j}} = 2^{-j(1-p+\beta)(1-s)} \xrightarrow{j\to\infty} \infty,$$

sillä $(1-p+\beta)(1-s) < 0$, kun $s > 1$ ja $\beta > p-1$.
Näin ollen (p,β)-epäyhtälö ei ole voimassa.

Pitääkö vastaesimerkissä olla $\mu \geq n - 1$

Edellisessä esimerkissä reunan pieni osa on $\mu = 1$ -ulotteinen, ja samaa ideaa käyttäen saadaan $\mathbb{R}^n$:ssä esimerkkejä, joissa $\mu \geq n - 1$. Tällöin paksu osa reunasta saadaan 'piiloon' pienen osan taakse, eikä (p, β)-Hardy päde millekään

$$\beta \geq p - n + \mu.$$

Pitääkö vastaesimerkissä olla $\mu \geq n - 1$

Edellisessä esimerkissä reunan pieni osa on $\mu = 1$ -ulotteinen, ja samaa ideaa käyttäen saadaan $\mathbb{R}^n$:ssä esimerkkejä, joissa $\mu \geq n - 1$. Tällöin paksu osa reunasta saadaan 'piiloon' pienen osan taakse, eikä (p, β)-Hardy päde millekään

$$\beta \geq p - n + \mu.$$

Toisaalta, jos pieni osa reunaa on μ-ulotteinen $(0 \leq \mu < n)$ ja tämän osan läheltä päästään λ-paksun reunan osan lähelle $(\mu < \lambda)$, pätee (p, β)-Hardy, kun

$$p - n + \mu < \beta < p - n + \lambda.$$

Pitääkö vastaesimerkissä olla $\mu \geq n-1$

Edellisessä esimerkissä reunan pieni osa on $\mu = 1$ -ulotteinen, ja samaa ideaa käyttäen saadaan $\mathbb{R}^n$:ssä esimerkkejä, joissa $\mu \geq n-1$. Tällöin paksu osa reunasta saadaan 'piiloon' pienen osan taakse, eikä (p, β)-Hardy päde millekään

$$\beta \geq p - n + \mu.$$

Toisaalta, jos pieni osa reunaa on μ-ulotteinen $(0 \leq \mu < n)$ ja tämän osan läheltä päästään λ-paksun reunan osan lähelle $(\mu < \lambda)$, pätee (p, β)-Hardy, kun

$$p - n + \mu < \beta < p - n + \lambda.$$

Kysymys: Päteekö edellä (p, β)-Hardy kaikille

$p - n + \mu < \beta < p - n + \lambda$ ilman lisäehtoa, jos $\mu < n - 1$?

Pitääkö vastaesimerkissä olla $\mu \geq n-1$

Edellisessä esimerkissä reunan pieni osa on $\mu = 1$ -ulotteinen, ja samaa ideaa käyttäen saadaan $\mathbb{R}^n$:ssä esimerkkejä, joissa $\mu \geq n-1$. Tällöin paksu osa reunasta saadaan 'piiloon' pienen osan taakse, eikä (p, β)-Hardy päde millekään

$$\beta \geq p - n + \mu.$$

Toisaalta, jos pieni osa reunaa on μ-ulotteinen $(0 \leq \mu < n)$ ja tämän osan läheltä päästään λ-paksun reunan osan lähelle $(\mu < \lambda)$, pätee (p, β)-Hardy, kun

$$p - n + \mu < \beta < p - n + \lambda.$$

Kysymys: Päteekö edellä (p, β)-Hardy kaikille

$p - n + \mu < \beta < p - n + \lambda$ ilman lisäehtoa, jos $\mu < n - 1$?

(tai päteekö saavutettavuusehto tässä tapauksessa aina?)

Tarkennus: mikä dimensio?

Edellisen kysymyksen kannalta on oleellista tietää, miten ulottuvuutta mitataan. Annetaan täsmällisempi muoto välttämättömästä ehdosta (Koskela-Zhong ($\beta = 0$), L.):

Lause

Jos alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa (p, β)-Hardy (ja $\beta \neq p$), niin kaikille palloille $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee joko

$$\dim_{\mathcal{H}}(4B \cap \Omega^c) > n - p + \beta$$

tai

$$\dim_{\mathcal{A}}(B \cap \Omega^c) < n - p + \beta.$$

Tarkennus: mikä dimensio?

Edellisen kysymyksen kannalta on oleellista tietää, miten ulottuvuutta mitataan. Annetaan täsmällisempi muoto välttämättömästä ehdosta (Koskela-Zhong ($\beta = 0$), L.):

Lause

Jos alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa (p, β)-Hardy (ja $\beta \neq p$), niin kaikille palloille $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee joko

$$\dim_{\mathcal{H}}(4B \cap \Omega^c) > n - p + \beta$$

tai

$$\dim_{\mathcal{A}}(B \cap \Omega^c) < n - p + \beta.$$

Tässä $\dim_{\mathcal{H}}$ on Hausdorff-dimensio ja $\dim_{\mathcal{A}}$ Aikawan esittelemä dimensio, jolle $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{A}}(E)$ kaikilla $E \subset \mathbb{R}^n$.

Tarkennus: mikä dimensio?

Edellisen kysymyksen kannalta on oleellista tietää, miten ulottuvuutta mitataan. Annetaan täsmällisempi muoto välttämättömästä ehdosta (Koskela-Zhong ($\beta = 0$), L.):

Lause

Jos alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on voimassa (p, β)-Hardy (ja $\beta \neq p$), niin kaikille palloille $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee joko

$$\dim_{\mathcal{H}}(4B \cap \Omega^c) > n - p + \beta$$

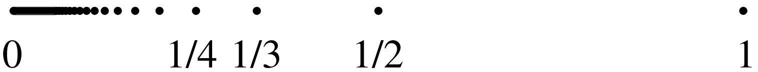
tai

$$\dim_{\mathcal{A}}(B \cap \Omega^c) < n - p + \beta.$$

Tässä $\dim_{\mathcal{H}}$ on Hausdorff-dimensio ja $\dim_{\mathcal{A}}$ Aikawan esittelemä dimensio, jolle $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{A}}(E)$ kaikilla $E \subset \mathbb{R}^n$.
Osoittautuu, että $\dim_{\mathcal{A}}$ on sama, kuin tunnetumpi Assouad-dimensio.

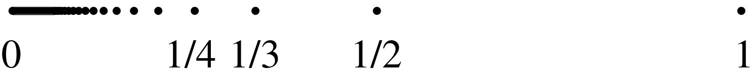
Esimerkki

Olkoon esimerkikisi $E = \{(k^{-1}, 0, \ldots, 0) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$ ja $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus E$.



Esimerkki

Olkoon esimerkikisi $E = \{(k^{-1}, 0, \dots, 0) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$ ja $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus E$.

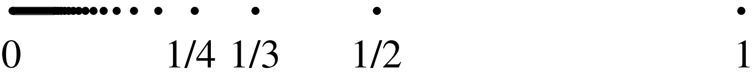


Koska $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$ ja $\dim_{\mathcal{A}}(E) = 1$, ei Ω:ssa voi olla voimassa (p, β)-Hardy, kun

$$p - n \leq \beta \leq p - n + 1.$$

Esimerkki

Olkoon esimerkikisi $E = \{(k^{-1}, 0, \ldots, 0) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$ ja $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus E$.



Koska $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$ ja $\dim_{\mathcal{A}}(E) = 1$, ei Ω:ssa voi olla voimassa (p, β)-Hardy, kun

$$p - n \leq \beta \leq p - n + 1.$$

(Muille β:n arvoille (p, β)-Hardy on voimassa.)

Viitteitä/loppu

A. Ancona, 'On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$', *J. London Math. Soc.* (2) 34 (1986), no. 2, 274–290.

G. H. Hardy, 'Notes on some points in the integral calculus (LX)', *Messenger of Math.* 54 (1925), 150–156.

P. Koskela and J. Lehrbäck, 'Weighted pointwise Hardy inequalities', *J. London Math. Soc.* 79 (2009), no. 3, 757-779.

P. Koskela and X. Zhong, 'Hardy's inequality and the boundary size', *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), no. 4, 1151–1158.

J. Lehrbäck, 'Weighted Hardy inequalities and the size of the boundary', *Manuscripta Math.* 127 (2008), no. 2, 249-273.

J. L. Lewis, 'Uniformly fat sets', *Trans. Amer. Math. Soc.* 308 (1988), no. 1, 177–196.

J. Nečas, 'Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle', *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 16 (1962), 305–326.

A. Wannebo, 'Hardy inequalities', *Proc. Amer. Math. Soc.* 109 (1990), 85–95.