Mitta- ja integraaliteoria
(osat 1 ja 2)

Juha Lehrbäck

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

syksy 2018

Alkusananen

Tämä luentomoniste perustuu Jyväskylän yliopistossa syksyinä 2017 ja 2018 pitämieni Mitta- ja integraaliteorian kurssien luentoihin. Koko syyslukukauden kestävä kokonaisuus jakaantuu kahteen erilliseen osaan: Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssilla (7 viikkoa) tutustutaan Lebesguen mitan ja integraalin teoriaan euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Mitta- ja integraaliteoria 2 -kurssilla (6 viikkoa) puolestaan käsitellään abstrakteja (ulko)mittoja ja integraaleja sekä esitellään tärkeät L^p-funktioavaruudet. Molemmat kurssit muodostavat oman itsenäisen kokonaisuutensa, mutta luonnollisesti jälkimmäisellä osalla Lebesguen mitta ja integraali motivoivat yleisen teorian kehittämistä ja toimivat myös tärkeinä esimerkkien lähteinä. Lisäksi kurssin jälkimmäisellä osalla täydennetään muutamia Lebesguen teoriaan liittyviä asioita, jotka ensimmäisellä osalla ohitetaan; yksi esimerkki näistä on Fubinin lauseen todistus. Tästä syystä on luontevaa, että molemmat osat sisältyvät samaan monisteeseen ja että kappaleiden numerointi jatkuu osalla 2 siitä, mihin ensimmäisellä osalla jäätiin.

Kurssien ja tämän monisteen suunnittelussa minulle on ollut suurta apua aikaisemmista Jyväskylän yliopistossa käytetyistä Mitta- ja integraaliteorian luentomonisteista, joiden kirjoittajina ovat olleet Tero Kilpeläinen, Veikko T. Purmonen ja Heli Tuominen. Lisäksi olen hyödyntänyt kirjallisuusluettelossa mainittuja lähteitä, jotka sopivat hyvin kurssien oheislukemiseksi. Näihin teoksiin on monisteessa myös joitakin viitteitä kurssilla ohitettujen aiheiden ja todistusten osalta.

Kuvat monisteeseen on piirretty geogebra-ohjelmistoa käyttäen, ellei toisin ole kuvan yhteydessä mainittu. Siniset viittausnumerot ja sisällysluettelossa olevat otsikot toimivat pdf-versiossa hyperlinkkeinä, joiden avulla voi siirtyä suoraan kyseiseen kohtaan monisteessa. *Huomautus-kohdat sisältävät täydentävää lisätietoa, joka ei kuulu kurssin oleelliseen sisältöön. Ensimmäisellä kurssilla monissa näistä on mainintoja asioista, joihin palataan tarkemmin vasta osan 2 aikana.

Kiitokset syksyn 2018 kurssieni opiskelijoille lukuisista monistetta koskevista huomiosta esimerkiksi painovirheisiin ja ilmaisun selkeyteen liittyen. Tekstiin edelleen jääneistä virheistä voi ilmoittaa sähköpostilla osoitteeseen juha.lehrback@jyu.fi

(Viimeisin päivitys tähän monisteeseen: 24.5.2019)

Kirjallisuutta

[BBT] Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson, *Real Analysis*, Second Edition, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

Kirja on vapaasti saatavilla verkossa:
classicalrealanalysis.info/documents/BBT-AlllChapters-Landscape.pdf

[Fri] Avner Friedman, *Foundations of modern analysis*, reprint of the 1970 original, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[StSha] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis, 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[Tao] Terence Tao, *An introduction to measure theory*, Graduate Studies in Mathematics, 126, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

Kirjan vapaasti saatavilla oleva preprint-versio löytyy osoitteesta:
terrytao.files.wordpress.com/2012/12/gsm-126-tao5-measure-book.pdf

Sisältö

Mitta- ja integraaliteoria 1 (mats111)

1. Johdanto

Tämä johdantoluku sisältää pohjustusta ja motivointia Lebesguen mittaa ja integraalia varten esimerkiksi integraalikäsitteen historian kautta. Lisäksi kerrataan ja täydennetään joihinkin kurssilla tarvittaviin analyysin työkaluihin liittyviä tietoja. Koko lukua ei ole tarkoitus käsitellä luennoilla huolellisesti. Toisaalta moniin johdannossa mainittuihin asioihin, erityisesti esimerkkeihin, kannattaa palata myöhemminkin kurssin edetessä. Varsinaisesti kurssin täsmällinen osuus alkaa kuitenkin vasta Luvun 2 alusta.

1.1. **Rationaali- ja irrationaalilukujen joukkojen "mitat"**

Pohditaan aluksi luonnollista pituusmittaa m reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Lähtökohtana on, että jokaisen välin mitta saadaan suoraan välin pituudesta eli

$$m([a,b]) = m(]a,b[) = b-a, \qquad \text{kun } a<b.$$

Siten esimerkiksi yksikkövälin $[0,1]\subset\mathbb{R}$ mitta on $m([0,1])=1$. Joukoille $A=[\frac14,\frac12]$ ja $B=[0,\frac14[\,\cup\,]\frac12,1]$ pätee, että $A\cap B=\emptyset$ ja $A\cup B=[0,1]$. Koska m vastaa välien pituutta, on ilmeisesti

$$\begin{aligned} m(A) &= \tfrac12-\tfrac14=\tfrac14 \quad \text{ja}\\ m(B) &= \big(\tfrac14-0\big)+\big(1-\tfrac12\big)=\tfrac14+\tfrac12=\tfrac34, \end{aligned}$$

joten erityisesti $m(A)+m(B)=1=m([0,1])=m(A\cup B)$.

Olkoon sitten $A\subset\mathbb{R}$ mikä tahansa joukko. Joukon A mittaa voidaan ainakin arvioida niin, että peitetään joukko A väleillä joiden yhteismitta (eli pituus) on mahdollisimman pieni. Otetaan esimerkki tästä ideasta.

Esimerkki 1.1. Olkoot $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ ja $B=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Tällöin $A\cup B=[0,1]$ ja $A\cap B=\emptyset$, joten pitäisi varmaan olla

$$1=m([0,1])=m(A\cup B)=m(A)+m(B). \tag{1}$$

Mutta mitä ovat $m(A)$ ja $m(B)$?

Muistetaan, että joukkojen A ja B alkioita on *tiheässä* (eli "joka paikassa") välillä $[0,1]$. Tästä seuraa, että jos joukko A peitetään äärellisellä määrällä avoimia välejä I_i, eli $A\subset\bigcup_{i=1}^N I_i$, niin tällöin $\sum_{i=1}^N m(I_i)\ge 1$ (mieti!). Vastaavasti jos joukko B peitetään äärellisellä määrällä avoimia välejä I_i', eli $B\subset\bigcup_{i=1}^{N'} I_i'$, niin tällöin täytyy olla $\sum_{i=1}^{N'} m(I'_i) \geq 1$. Tämä johtaisi siihen, että äärellisiä peitteitä käyttäen molempien joukkojen A ja B mitoiksi tulisi vähintään 1, eikä yhtälö (1) voisi pitää paikkaansa.

Entä jos sallittaisiin myös äärettömien peitteiden käyttö? Muistetaan, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on *numeroituva* eli on olemassa bijektio $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Tällöin voidaan kirjoittaa, että $A = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Nyt jokainen $q_i \in A$ voidaan peittää välillä I_i siten, että summa $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$ saadaan niin pieneksi kuin ikinä halutaan!

Tarkemmin: Olkoon $\varepsilon > 0$ miten pieni tahansa. Geometrisen sarjan summakaavan mukaan

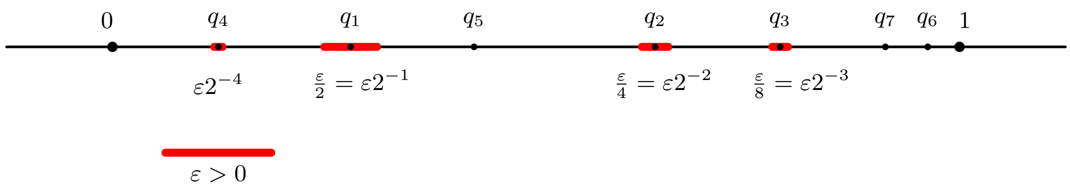
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

ja siten

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon.$$

Jos siis valitaan $I_i =]q_i - \varepsilon 2^{-i-1}, q_i + \varepsilon 2^{-i-1}[$, on q_i tämän välin keskipiste ja välin I_i pituus on

$$m(I_i) = q_i + \varepsilon 2^{-i-1} - (q_i - \varepsilon 2^{-i-1}) = 2 \cdot \varepsilon 2^{-i-1} = \varepsilon 2^{-i}.$$



Erityisesti $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, koska $q_i \in I_i$ kaikille $i \in \mathbb{N}$. Näin ollen täytyy varmaankin olla

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon,$$

ja koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, niin ilmeisesti $m(A) = 0$.

Toisaalta jos oletetaan, että yhtälö (1) on voimassa, niin tällöin

$$m(B) = 1 - m(A) = 1.$$

Tämä viittaisi siihen, että välillä $[0,1]$ on paljon enemmän irrationaalilukuja kuin rationaalilukuja.

Kysymyksiä: Ovatko edellä tehdyt päätelmät järkeviä ja saadaanko joukkoon $\mathbb{R}$ todella määriteltyä mitta m niin, että edellä kuvatut ominaisuudet ovat voimassa? Yleisemmin voidaan kysyä, onko mahdollista määritellä luonnollinen mitta avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 2$, niin että tapauksessa $n = 2$ tämä mitta vastaisi pinta-alaa ja tapauksessa $n = 3$ tilavuutta?

1.2. **Integraalikäsitteen historiaa ja ongelmia**

1.2.1. *Newtonin integraali.* Kun Isaac Newton ja Gottfried Leibniz kehittivät differentiaali- ja integraalilaskentaa 1600-luvun lopussa, pidettiin pinta-alan käsitteen perusteita itsestäänselvinä, ja tavoitteena oli saada työkaluja monimutkaisempien joukkojen — esimerkiksi funktion f kuvaajan alle välillä $[a, b]$ jäävän joukon — pinta-alojen määrittämiseen. Tämä onnistuu *antiderivaatan* (eli integraalifunktion) avulla: Jos $F'(x) = f(x)$ kaikille $x \in [a, b]$, voidaan funktion f integraali yli välin $[a, b]$ periaatteessa *määritellä* asettamalla

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a).$$

Monissa yhteyksissä tätä kutsutaan funktion f *Newtonin integraaliksi.*

Tässä lähestymistavassa pidetään selvänä, että luku $F(b) - F(a)$ todella vastaa funktion f kuvaajan alle välillä $[a, b]$ jäävää pinta-alaa (kun $f(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a, b]$).

Newtonin integraalin määritelmän eräs suuri heikkous on, että se toimii tietysti vain silloin, kun tutkittavan funktion f tiedetään jo olevan jonkun funktion F derivaatta. On myös olemassa suuri joukko alkeisfunktioita f, joiden antiderivaattaa F ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla, ja tällöin antiderivaatan arvojen $F(a)$ ja $F(b)$ laskeminen ei tietenkään ole kovin suoraviivaista. Määritelmässä ei myöskään oteta tarkempaa kantaa pinta-alan käsitteen määrittelyyn.

1.2.2. *Cauchyn integraali.* Augustin-Louis Cauchy täsmensi analyysin perusteita 1800-luvun alkupuoliskolla esimerkiksi antamalla lähes nykyisen kaltaiset määritelmät jatkuvuudelle ja raja-arvoille sekä derivaatalle $f' = \frac{df}{dx}$ erotusosamäärän raja-arvona; aikaisemmin derivaattaa $\frac{df}{dx}$ oli pidetty lähinnä "infinitesimaalisten" eli "äärettömän pienien" suureiden df ja dx suhteena, mikä johtaa helposti epämääräisiin filosofisiin pohdintoihin näiden käsitteiden luonteesta.

Cauchy ymmärsi, että derivaatan ohella myös (määrätyn) integraalin käsite vaatii täsmällisen määrittelyn, oleellisesti seuraavasti: Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva funktio ja olkoon $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ välin $[a, b]$ jako, jolloin siis $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_N = b$. Tätä jakoa vastaava *Cauchyn summa* on

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Merkitään lisäksi $|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, N\}$.

Cauchy osoitti, että kun $|P| \to 0$, lähestyy $S(f, P)$ aina samaa raja-arvoa I, joka ei riipu käytetyistä jaoista P. Tämän luvun I Cauchy määritteli (jatkuvan) funktion f integraaliksi yli välin $[a, b]$, toisin sanoen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{|P|\to 0} S(f, P).$$

Tämän jälkeen Cauchy todisti derivaatan ja integraalin käänteisyyden: Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin integraalifunktio $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikille $x \in [a, b]$. Väliarvolauseen avulla tästä päästään puolestaan analyysin peruslauseeseen: jos F on mikä tahansa jatkuvan funktion f antiderivaatta (eli $F'(x) = f(x)$ kaikille $x \in [a,b]$), niin

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

1.2.3. *Riemannin integraali.* Cauchyn integraali toimii mainioisti jatkuville ja myös paloittain jatkuville funktioille, mutta matemaattisen analyysin kehittyessä tuli vastaan kasvava tarve integroida muunkinlaisia funktioita. Bernhard Riemann huomasi 1800-luvun puolivälissä, että tämä onnistuu Cauchyn määritelmää sopivasti muokkaamalla: Kun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio ja $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ on välin $[a,b]$ jako, valitaan jokaiselta jakoväliltä piste $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ja merkitään $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Näin saadaan *Riemannin summa*

$$S(f,P,z) = \sum_{i=1}^{N} f(z_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Nyt Riemann **määritteli**, että rajoitettu funktio f on (Riemann-) integroituva, jos näillä summilla on olemassa raja-arvo $I = \lim\limits_{|P|\to 0} S(f,P,z)$, joka ei riipu käytetyistä jaoista P eikä pisteistä z_i, ja tällöin funktion f (Riemann-) integraali on juuri tämä raja-arvo eli

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{|P|\to 0} S(f,P,z).$$

On helpohkoa osoittaa, että kaikki jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia ja näille Cauchyn ja Riemannin määritelmät johtavat aina samaan lopputulokseen.

Useat matemaatikot, kuten Gaston Darboux, Vito Volterra ja Giuseppe Peano, jatkoivat Riemann-integraalin kehittämistä 1800-luvun loppupuolella. Heiltä on peräisin esimerkiksi seuraava tulos, jonka antamaa yhtäpitävyyttä käytetään usein Riemann-integraalin määritelmänä: Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja olkoon $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ välin $[a,b]$ jako. Tähän jakoon liittyvät funktion f ala- ja yläsummat ovat

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{ja} \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

missä

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Tällöin funktio f on Riemann-integroituva yli välin $[a,b]$ jos ja vain jos

$$\sup\{L(f,P) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\} = \inf\{U(f,P) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\},$$

ja yhtäsuuruuden vallitessa tämä yhteinen arvo on täsmälleen $\int_a^b f(x)\,dx$.

Vaikka Riemann-integroituvia funktioita osoittautuu olevan paljon enemmän kuin jatkuvia funktiota, kävi 1800-luvun loppuun mennessä ilmi, ettei Riemann-integraali ollut siltikään riittävä kehittyvän analyysin tarpeisiin. Keskeisiä **ongelmia ja kysymyksiä** olivat esimerkiksi seuraavat:

(1) Riemann-integroituvia funktiota on edelleen liian vähän! (Katso esimerkiksi kohta (2).)

(2) Rajankäynti: Jos $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia funktioita ja on olemassa raja-arvofunktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikille $x \in [a,b]$, niin haluttaisiin, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k\, dx = \int_a^b f\, dx \quad \Big(= \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k\, dx \Big).$$

Esimerkki 1.2. Olkoon $A = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ja olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joukon A karakteristinen funktio, toisin sanoen,

$$f(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A, \\ 0, & \text{jos } x \in [0,1] \setminus A. \end{cases}$$

Merkitään lisäksi $A_k = \{q_1, q_2, \ldots q_k\}$ ja $f_k(x) = \chi_{A_k}(x)$ kaikille $x \in [0,1]$.

Tällöin $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikille $x \in [0,1]$ (mieti!) ja

$$\int_0^1 f_k(x)\, dx = 0 \qquad \text{kaikille } k \in \mathbb{N},$$

sillä on vain äärellinen määrä poikkeuspisteitä $q_1, q_2, \ldots, q_k$, joissa funktion f_k arvo ei ole nolla. Näin ollen myös

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = 0.$$

Tässä tapauksessa **ei** kuitenkaan ole olemassa lukua

$$\int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

sillä funktio f ei ole Riemann-integroituva yli välin $[0,1]$. Tämä seuraa siitä, että kaikille välin $[0,1]$ jaoille P pätee, että

$$L(f,P) = 0 < 1 = U(f,P).$$

Näin ollen kaava

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, dx$$

ei yleisesti ottaen päde Riemann-integroituville funktioille f_k, vaikka rajafunktio $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ olisikin olemassa.

(3) Mikä on laajin funktioiden $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ luokka, jolle on voimassa analyysin peruslause muodossa

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a),$$

ja esimerkiksi missä mielessä derivaatan f' täytyy olla olemassa ja integroituva?

Tähän kysymykseen liittyen Vito Volterra antoi vuonna 1881 esimerkin funktiosta $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, joka on derivoituva koko välillä $[a,b]$ ja jonka derivaattafunktio $f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, mutta f' ei ole Riemann-integroituva.

(4) Historiallisesti hyvin merkittävä motivoija integraalikäsitteen — ja koko matemaattisen analyysin — kehittämiseen 1800-luvulla oli *Fourier-sarjojen* teoria. Pohjimmiltaan tässä on kyse siitä, milloin funktio $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ voidaan esittää niin sanottuna *trigonometrisena sarjana* eli muodossa

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

missä

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad \text{ja} \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Tätä kysymystä ei kuitenkaan käsitellä tällä kurssilla, vaan Fourier-sarjoihin voi tutustua tarkemmin esimerkiksi kursseilla Fourier-sarjat sekä Funktionaalianalyysi.

1.2.4. *Lebesguen integraali.* Vastauksia kaikkiin edellä mainittuihin ongelmiin ja kysymyksiin saatiin heti 1900-luvun alussa, kun Henri Lebesgue julkaisi oman integraaliteoriansa artikkelissa *Sur une généralisation de l'intégrale définie* vuonna 1901. Cauchyn ja Riemannin integraalit perustuvat funktion lähtöjoukon $[a, b]$ (eli "x-suunnan") jakamiseen osiin ja funktion arvojen $y = f(x)$ tutkimiseen kullakin jakovälillä. Lebesguen keskeisin idea oli kääntää tämä asetelma toisin päin: Jaetaankin funktion maalijoukko $f([a, b])$ (eli "y-suunta") osiin, ja tutkitaan kullekin jakovälille kuvautuvien lähtöjoukon osien kokoa eli *mittaa.*

Sama hieman täsmällisemmin ilmaistuna: Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ "mitallinen" funktio. Oletetaan myös yksinkertaisuuden vuoksi, että f on rajoitettu, jolloin on siis olemassa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ siten, että $\alpha < f(x) < \beta$ kaikille $x \in [a, b]$. Olkoon $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$ välin $[\alpha, \beta]$ jako. Merkitään

$$E_i = \{x \in [a, b] : y_{i-1} < f(x) \le y_i\} = f^{-1}\big(]y_{i-1}, y_i]\big), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

ja olkoon $m(E_i)$ joukon E_i "mitta". Lebesgue osoitti, että tällöin on olemassa raja-arvo

$$I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{N} y_i\, m(E_i),$$

joka ei riipu käytetyistä jaoista P. Tämä raja-arvo on funktion f *Lebesgue-integraali* eli

$$\int_{[a,b]} f\,dm := \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{N} y_i\, m(E_i).$$

Summille $\sum_{i=1}^{N} y_i\, m(E_i)$ saadaan myös toinen tulkinta, kun käytetään funktion f *distribuutiofunktiota*

$$g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ \ g(t) = m\big(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}\big).$$

Funktio g on vähenevä ja siten Riemann-integroituva. Mitan m perusominaisuuksien avulla voidaan osoittaa, että

$$m(E_i) = g(y_{i-1}) - g(y_i),$$

minkä jälkeen summaa sopivasti muokkaamalla nähdään, että $\sum_{i=1}^{N} y_i\, m(E_i)$ on itse asiassa jakoon P liittyvä Riemannin summa funktiolle g. Näin ollen funktion f Lebesguen integraali yli välin $[a, b]$ on sama, kuin funktion g Riemann-integraali yli välin $[\alpha, \beta]$.

Tällä kurssilla me tulemme lähestymään Lebesgue-integraalia hieman yllä kuvatusta eroavalla tavalla. Taustalla oleva peruslähtökohta sekä lopputulos ovat kuitenkin samoja. Myös meidän käyttämämme määritelmä pohjautuu vahvasti *Lebesguen mittaan* m, johon liittyviä pohdintoja teimme hieman jo Kappaleessa 1.1. Tästä syystä tutustumme kurssin aluksi mittateoriaan, esimerkiksi mitan m perusominaisuuksiin sekä niin sanottuihin mitallisiin joukkoihin ja mitallisiin funktioihin. Karkeasti sanottuna mitalliset funktiot ovat täsmälleen niitä funktioita, jotka käyttäytyvät "hyvin" Lebesguen mitan suhteen, jolloin erityisesti edellä määritellyt joukot E_i ovat mitallisia. Mainittakoon, että jo ennen Lebesguen työtä mittoihin liittyvää teoriaa olivat kehittäneet 1800-luvun lopussa esimerkiksi Camille Jordan ja Émile Borel.

Lebesguen integraalin määritelmä on käytännössä täsmälleen sama kaikissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ja se toimii aivan yhtä hyvin niin väleille kuin muillekin (mitallisille) joukoille. Lebesguen integraalissa ei myöskään tarvitse tehdä eroa rajoitettujen ja rajoittamattomien joukkojen ja/tai funktioiden välille, toisin kuin Riemann-integraalin tapauksessa (epäoleelliset integraalit). Lisäksi Lebesguen integraaliteoria on helposti yleistettävissä mihin tahansa *mitta-avaruuteen*; tähän tutustutaan kurssilla Mitta- ja integraaliteoria 2 [MIT 2]. Nämä yleistykset ovat esimerkiksi modernin todennäköisyysteorian taustalla.

Seuraava esimerkki havainnollistaa Lebesgue-integraalin toimintaa ja käyttökelpoisuutta:

Esimerkki 1.3. Olkoon $A = [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ja olkoon $f(x) = \chi_A(x)$ kaikille $x \in [0,1]$; vertaa Esimerkkiin 1.2 ja muista, että funktiolla f ei ole Riemann-integraalia. Esimerkin 1.1 perusteella pitää ilmeisesti olla, että

$$m(A) = 0 \quad \text{ja} \quad m([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = m(B) = 1.$$

Koska funktio f saa vain arvoja 1 (joukossa A) ja 0 (joukossa B), ovat Lebesguen integraalin määritelmässä tutkittavat summat $\sum_{i=1}^N y_i \, m(E_i)$ oleellisesti muotoa

$$1 \cdot m(A) + 0 \cdot m(B) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Näin ollen täytyy ilmeisesti olla myös

$$\int_{[0,1]} f \, dm = 0 \qquad \left(= \lim_{k \to \infty} \int_{[0,1]} f_k \, dm \right),$$

missä $A_k = \{q_1, q_2, \ldots q_k\}$ ja $f_k(x) = \chi_{A_k}(x)$, kuten Esimerkissä 1.1. Näyttäisi siis siltä, että ainakin tässä tapauksessa Lebesgue-integraali käyttäytyy rajankäynnin suhteen paremmin kuin Riemann-integraali.

Huomautus. Tässä vaiheessa on syytä korostaa, että erilaiset integraalikäsitteet ovat syntyneet pääasiassa tapeesta saada mahdollisimman paljon integroituvia funktioita. Erityisesti kyse **ei** ole siitä, että eri integraalit antaisivat samalle funktiolle erilaisia arvoja silloin kun funktiolla on olemassa useamman määritelmän mukainen integraali. Esimerkiksi jo aiemmin todettiin, että jatkuvan funktion Riemann-integraali on sama kuin sen Cauchy-integraali. Vastaavasti tulemme osoittamaan, että jos funktio $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva, on f myös Lebesgue-integroituva ja tällöin

$$\int_{[a,b]} f \, dm = \int_a^b f(x) \, dx.$$

1.3. **Kertausta ja täydennystä**

Tämä kappale sisältää kertausta asioista, joita tullaan jatkossa tarvitsemaan, sekä myös muutamia uusia käsitteitä ja näihin liittyviä aputuloksia.

1.3.1. *Joukko-oppia.* Olkoon I indeksijoukko ja olkoot A_i joukkoja kaikille $i \in I$. Tällöin joukkojen A_i *yhdiste* on

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ jollekin } i \in I\}$$

ja näiden *leikkaus* on

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ kaikille } i \in I\}.$$

Tällöin kaikille joukoille B pätee esimerkiksi, että

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \quad \text{ja} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

Joukkojen A ja B *erotus* on

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Kun X on kiinteä perusjoukko (tällä kurssilla yleensä $X = \mathbb{R}^n$ jollekin $n \in \mathbb{N}$), on joukon $A \subset X$ *komplementti* (joukon X suhteen)

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Tällöin kaikille $A, B \subset X$ pätee, että $(A^c)^c = A$ ja $A \setminus B = A \cap B^c$ (mieti!).

Jos $A_i \subset X$ kaikille $i \in I$, ovat voimassa niin sanotut *De Morganin säännöt* eli

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{ja} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Erityisesti

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{ja} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

kaikille $A, B \subset X$. Näiden tarkempi kertaaminen jätetään harjoitustehtäviksi.

Joukon A *potenssijoukko* $\mathcal{P}(A)$ on joukon A osajoukkojen kokoelma eli

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

Sanomme, että joukot A_i, $i \in I$, ovat *erillisiä*, jos ne eivät leikkaa toisiaan eli $A_i \cap A_j = \emptyset$, aina kun $i \neq j$ $(i, j \in I)$.

Kun $f\colon A \to B$ on funktio, on joukon $E \subset A$ *kuvajoukko*

$$f(E) = \{y \in B : y = f(x) \text{ jollekin } x \in E\} = \{f(x) : x \in E\} \subset B$$

ja joukon $F \subset B$ *alkukuva* on

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\} \subset A.$$

Olkoot vielä $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Tällöin

$$A + x = \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + x,\ a \in A\} = \{a + x : a \in A\} \quad \text{(joukon siirto)}$$

ja

$$tA = \{y \in \mathbb{R}^n : y = ta,\ a \in A\} = \{ta : a \in A\} \quad \text{(joukon venytys).}$$

1.3.2. *Topologiaa.* Avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, pisteiden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *euklidinen normi* on

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ välinen *euklidinen etäisyys* on $\|x - y\|$. Joukko

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

on x-keskipisteinen r-säteinen avoin pallo.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Piste $x \in A$ on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset A$. Joukon A *sisus* $\operatorname{int}(A)$ on sen kaikkien sisäpisteiden muodostama joukko. Joukko A on *avoin*, jos kaikki pisteet $x \in A$ ovat sisäpisteitä eli $A = \operatorname{int}(A)$.

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *reunapiste*, merkitään $x \in \partial A$, jos kaikille $r > 0$ on olemassa pisteet $a \in B(x, r) \cap A$ ja $a' \in B(x, r) \cap A^c$. Toisin sanoen, $x \in \partial A$ jos ja vain jos jokainen pallo $B(x, r)$, $r > 0$, leikkaa sekä joukkoa A että komplementtia A^c.

On helppo nähdä, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin täsmälleen silloin, kun A ei sisällä yhtään reunapistettään. Vastaavasti sanotaan, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos se sisältää kaikki reunapisteensä eli $\partial A \subset A$. Tämä pätee täsmälleen silloin, kun komplementti A^c on avoin. Muista, että usein joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ei ole avoin eikä suljettu — tällöin joukko A sisältää siis osan reunapisteistään, mutta ei kaikkia. Joukon A *sulkeuma* on joukko $\overline{A} = A \cup \partial A$. Kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee, että $\operatorname{int}(A) \subset A \subset \overline{A}$. Lisäksi $\operatorname{int}(A)$ on suurin avoin joukko, joka sisältyy joukkoon A, ja $\overline{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon A.

Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *rajoitettu*, jos on olemassa $R > 0$ siten, että $A \subset B(0, R)$, missä $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$; muuten joukko A on *rajoittamaton*. Joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, jos se on suljettu ja rajoitettu. Kompakteilla joukoilla on seuraava hyvin tärkeä *peiteominaisuus*: Oletetaan, että $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja että avoimet joukot $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, peittävät joukon K eli $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Tällöin itse asiassa jo äärellinen määrä joukkoja U_i riittää peittämään joukon K eli on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$.

Joukko A on *numeroituva*, jos se on äärellinen (eli joukossa A on vain äärellisen monta alkiota) tai numeroituvasti ääretön eli on olemassa bijektio $\varphi \colon \mathbb{N} \to A$. Tällöin joukon A alkiot voidaan luetella eli

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}, \qquad \text{missä } a_i = \varphi(i).$$

Joukko A on *ylinumeroituva*, jos se ei ole numeroituva. Esimerkiksi $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ ovat numeroituvia, mutta $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^n$ ovat ylinumeroituvia.

1.3.3. *Laajennettu* $\mathbb{R}$. Joukkojen mittoja ja myöhemmin funktioiden integraaleja tarkastellessamme päädymme jatkossa tilanteisiin, joissa laskutoimituksissa esiintyvät mitat ja/tai funktioiden arvot voivat olla äärettömiä. Tätä varten määrittelemme tarvittavat järjestysominaisuudet ja laskutoimitukset joukossa $\overline{\mathbb{R}}$, joka on niin sanottu *laajennettu reaalilukujen joukko.*

Asetetaan, että $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ varustettuna seuraavilla ominaisuuksilla:

(i) Järjestys: $-\infty < a < \infty$ kaikille $a \in \mathbb{R}$, joten erityisesti $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

(ii) Yhteenlasku:
$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad \text{kun } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$b - \infty = b + (-\infty) = -\infty + b = -\infty, \quad \text{kun } b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$
Sen sijaan laskutoimituksia
$$\infty - \infty, \quad \infty + (-\infty) \quad \text{ja} \quad -\infty + \infty$$
ei ole määritelty.

(iii) Kertolasku:
$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a > 0 \\ -\infty, & \text{jos } a < 0 \\ 0, & \text{jos } a = 0 \quad \text{(sopimus!)} \end{cases}$$
ja
$$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty, & \text{jos } a > 0 \\ \infty, & \text{jos } a < 0 \\ 0, & \text{jos } a = 0 \quad \text{(sopimus!).} \end{cases}$$
Sopimus $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ on luonteva esimerkiksi siitä syystä, että jos $f\colon A \to \mathbb{R}$ on nollafunktio eli $f(x) = 0$ kaikille $x \in A$, on tämän sopimuksen ansiosta funktion f integraali yli joukon A aina 0, vaikka joukon A mitta olisi ääretön; esimerkiksi voi olla $A = \mathbb{R}$.

(iv) Jakolasku:
$$\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a > 0 \\ -\infty, & \text{jos } a < 0 \end{cases}$$
ja
$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0, \qquad \text{kun } a \neq \pm\infty \text{ eli } a \in \mathbb{R}.$$
Laskutoimituksia $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ja $\dfrac{0}{0}$ **ei ole** määritelty.

1.3.4. *Supremum ja infimum joukossa* $\overline{\mathbb{R}}$. Tulemme tarvitsemaan pienimmän ylärajan ja suurimman alarajan käsitteitä eli supremumia ja infimumia lukuisissa eri yhteyksissä. Kerrataan tätä varten näiden määritelmät ja laajennetaan samalla tarkastelut joukkoon $\overline{\mathbb{R}}$.

Olkoon $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Luku $M \in \overline{\mathbb{R}}$ on joukon A *supremum* eli pienin yläraja, merkitään $M = \sup A$, jos

(1°) M on joukon A yläraja eli kaikille $x \in A$ pätee $x \leq M$, ja

(2°) Joukolla A ei ole pienempää ylärajaa kuin M eli jos $M' < M$, niin M' ei ole joukon A yläraja; on siis olemassa ainakin yksi $x \in A$ siten, että $x > M'$.

Vastaavasti luku $m \in \overline{\mathbb{R}}$ on joukon A *infimum* eli suurin alaraja, merkitään $m = \inf A$, jos

(1°) m on joukon A alaraja eli kaikille $x \in A$ pätee $x \geq m$, ja

(2°) Joukolla A ei ole suurempaa alarajaa kuin m eli jos $m' > m$, niin m' ei ole joukon A alaraja; on siis olemassa ainakin yksi $x \in A$ siten, että $x < m'$.

Jos joukossa $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ on olemassa suurin alkio eli *maksimi* $\max A \in A$, on $\sup A = \max A$. Vastaavasti jos joukossa A on olemassa pienin alkio eli *minimi* $\min A \in A$, on $\inf A = \min A$. Muista, että kaikissa joukoissa ei ole maksimia tai minimiä; perusesimerkki tästä on avoin väli $]a, b[$, jossa ei ole maksimia eikä minimiä, mutta $\inf\,]a, b[= a$ ja $\sup\,]a, b[= b$.

Jokaisella joukolla $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ on kuitenkin olemassa $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ ja $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$: Jos joukolla A ei ole ylärajaa $M < \infty$, on $\sup A = \infty$, ja jos $A = \emptyset$ tai $A = \{-\infty\}$, niin $\sup A = -\infty$. Jos taas A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, eli on olemassa yläraja $M < \infty$, takaa reaalilukujen *täydellisyysaksiooma*, että on olemassa $\sup A \in \mathbb{R}$. Vastaavasti jos joukolla A ei ole alarajaa $m > -\infty$, on $\inf A = -\infty$, ja jos $A = \emptyset$ tai $A = \{\infty\}$, niin $\inf A = \infty$. Jos taas A on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu, eli on olemassa alaraja $m > -\infty$, seuraa täydellisyysaksioomasta, että on olemassa $\inf A \in \mathbb{R}$.

Todetaan vielä muutamia hyödyllisiä asioita supremumiin ja infimumiin liittyen:

- Jos $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ on joukko ja $(x_k) \subset A$ on lukujono, jolla on raja-arvo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$, niin
$$\inf A \leq \lim_{k\to\infty} x_k \leq \sup A.$$
- Jos $(x_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$ on kasvava lukujono, niin on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$ ja
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$
Vastaavasti jos $(x_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$ on vähenevä lukujono, niin on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$ ja
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$
- Olkoon $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ epätyhjä. Jos A on ylhäältä rajoitettu, niin luku $M < \infty$ on joukon $A \subset \mathbb{R}$ supremum jos ja vain jos M on joukon A yläraja ja kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a \geq M - \varepsilon$. Vastaavasti jos A on alhaalta rajoitettu, niin luku m on joukon A infimum jos ja vain jos m on joukon A alaraja ja kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a \leq m + \varepsilon$.

1.3.5. *Yleiset summat.* Olkoon I indeksijoukko ja olkoot $a_i \geq 0$ kaikille $i \in \mathbb{N}$ (voi siis olla myös $a_i = \infty$). Tällöin lukujen a_i summaksi yli joukon I määritellään

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \subset I \text{ on äärellinen} \right\}.$$

Seuraava lemma kertoo, että tapauksessa $I = \mathbb{N}$ yllä oleva summan määritelmä johtaa samaan lopputulokseen kuin tuttu esitys äärellisten summien raja-arvona.

Huomautus. Sovitaan, että tällä kurssilla $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ eli $0 \notin \mathbb{N}$.

Lemma 1.4. *Oletetaan, että $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad \left(= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right).$$

Todistus. Olkoon $N \in \mathbb{N}$. Koska joukko $J_N = \{1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{N}$ on äärellinen, saadaan summan määritelmän nojalla, että

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i \in J_N} a_i \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i.$$

Koska tämä pätee kaikille $N \in \mathbb{N}$, on raja-arvon perusominaisuuksien mukaan myös

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i. \tag{2}$$

Olkoon sitten $J \subset \mathbb{N}$ mikä tahansa äärellinen joukko. Tällöin voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ siten, että $J \subset J_N = \{1, 2, \ldots, N\}$. Koska $a_i \geq 0$ kaikille $i \in \mathbb{N}$ ja $J \subset J_N$, saadaan, että

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J_N} a_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i,$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että jono (S_N), missä

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i, \quad \text{kaikille } N \in \mathbb{N},$$

on kasvava. Koska tämä pätee kaikille äärellisille osajoukoille $J \subset \mathbb{N}$, voidaan vasemmalla puolella ottaa supremum yli kaikkien äärellisten osajoukkojen, ja saadaan summan määritelmän nojalla, että

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i; \tag{3}$$

Epäyhtälöt (2) ja (3) yhdessä todistavat väitteen. $\square$

Lemma 1.5. *Oletetaan, että $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$. Jos $a_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$, niin*

$$\sum_{i \in I} a_i = \infty.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 1.6. *Jos* $a_{ij} \geq 0$ *kaikilla* $i \in I$ *ja* $j \in J$*, niin*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Todistus. Riittää osoittaa yhtäsuuruus

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij},$$

koska yhtäsuuruus toisen summausjärjestyksen suhteen osoitetaan aivan samaan tapaan. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

2. Lebesguen ulkomitta

Toiveenamme olisi määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, osajoukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ mitta $m(A)$ niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(i) $m(A) \in [0, \infty]$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$. (ei-negatiivisuus)

(ii) $m(A + x) = m(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ ja kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. (siirtoinvarianssi)

(iii) Jos $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ ovat *erillisiä* eli $A_j \cap A_i = \emptyset$ aina kun $j \neq i$, niin

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j). \qquad \text{(numeroituva additiivisuus)}$$

Osoittautuu, että itse asiassa tällaista kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ määriteltyä mittaa m **ei ole olemassa** — tämän seikan tarkka perustelu tosin ohitetaan tällä kurssilla. Jos kuitenkin rajoitutaan vain niin sanottuihin *mitallisiin* joukkoihin $A \subset \mathbb{R}^n$, saadaan aikaan Lebesguen mitta m, jolle ominaisuudet (i)–(iii) ovat voimassa. Lisäksi m vastaa yksinkertaisissa tilanteissa joukkojen luonnollista "geometrista mittaa" eli pituutta ($n = 1$), pinta-alaa ($n = 2$) tai tilavuutta ($n = 3$).

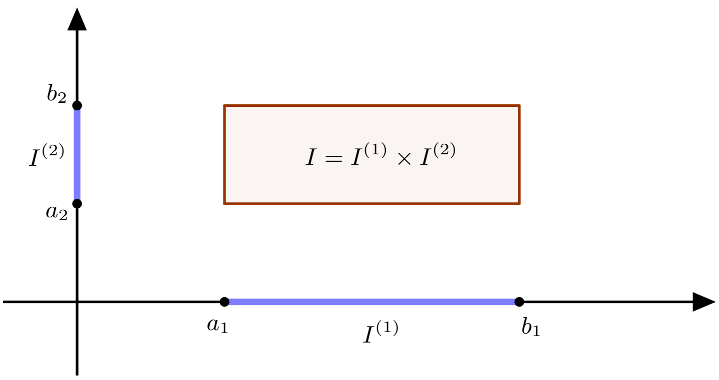
2.1. Ulkomitan määritelmä

Varsinaisen Lebesguen mitan m määritelmässä tarvitsemme niin sanottua Lebesguen ulkomittaa m^*. Ulkomitan konstruktiossa idea on aivan sama, kuin Esimerkissä 1.1 kuvattu: joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ koitetaan peittää tehokkaasti mahdollisimman yksinkertaisilla joukoilla eli avaruuden $\mathbb{R}^n$ väleillä.

Määritelmä 2.1. (i) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ **välejä** (eli n-välejä) ovat joukot

$$I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n,$$

missä $I^{(k)} \subset \mathbb{R}$ on väli kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$; toisin sanoen $I^{(k)}$ on muotoa $]a_k, b_k[$, $[a_k, b_k]$, $]a_k, b_k]$ tai $[a_k, b_k[$, missä $-\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty$. Erityisesti koordinaattivälin $I^{(k)}$ avoin päätepiste voi olla $\pm\infty$, jolloin väli I on **rajoittamaton**, tai voi olla $I^{(k)} = \{a_k\}$ jollekin $k = 1, 2, \ldots, n$, jolloin väli I on **surkastunut**.



(ii) n-väli $I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)}$ on **avoin**, jos $I^{(k)} \subset \mathbb{R}$ on avoin väli kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin siis

$$I =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[,$$

missä $-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$ kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$. Vastaavasti väli I on **suljettu**, jos $I^{(k)} \subset \mathbb{R}$ on suljettu väli kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Olkoot n-välin $I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)}$ koordinaattivälien $I^{(k)}$ päätepisteet $a_k \leq b_k$. Tällöin välin I **geometrinen mitta** on

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \quad \in [0, \infty].$$

Lisäksi asetetaan $v(\emptyset) = 0$.

(iv) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien avoimien välien sekä tyhjän joukon muodostamaa kokoelmaa merkitään kirjaimella $\mathcal{K}$, toisin sanoen

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_n = \big\{ I \subset \mathbb{R}^n : I \text{ on avoin väli} \big\} \cup \{\emptyset\}.$$

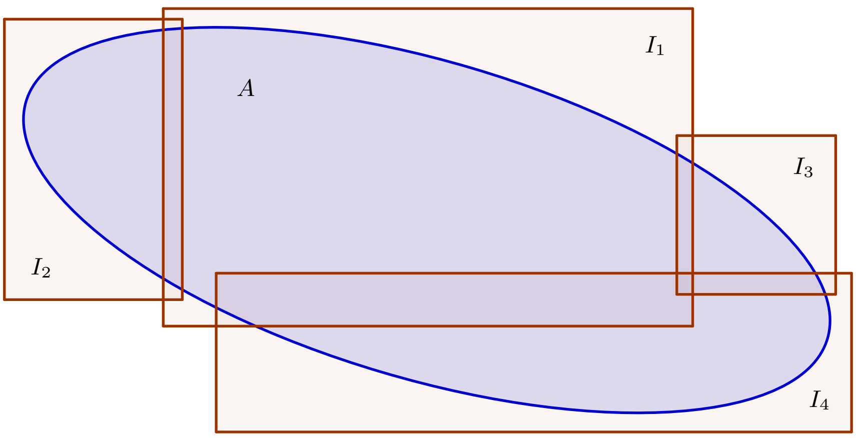
Huomaa, että jos väli I on surkastunut eli $a_k = b_k$ ainakin yhdelle $k = 1, 2, \ldots, n$, niin $v(I) = 0$; muista sopimus $0 \cdot \infty = 0$ rajoittamattoman välin tapauksessa. Jos taas väli I on rajoittamaton, eli yksikin koordinaattivälien päätepisteistä on $\pm\infty$, ja I ei ole surkastunut, niin $v(I) = \infty$.

Tapauksessa $n = 1$ geometrinen mitta on siis yksinkeraisesti välin $I \subset \mathbb{R}$ pituus. Tapauksessa $n = 2$ välit ovat suorakulmioita ja geometrinen mitta vastaa näiden pinta-alaa ja tapauksessa $n = 3$ välit ovat suorakulmaisia särmiöitä ja geometrinen mitta vastaa näiden tilavuutta.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikille osajoukoille voidaan nyt määritellä Lebesguen ulkomitta kokoelmasta $\mathcal{K}$ saatavien peitteiden avulla.

Määritelmä 2.2. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ (n-ulotteinen) **Lebesguen ulkomitta** on luku

$$m^*(A) = m_n^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : I_i \in \mathcal{K}_n \ \text{ ja } \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \in [0, \infty].$$



Huomautus. (a) Jos $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $I_i \in \mathcal{K}$, niin sanotaan, että joukkojen I_i kokoelma eli joukkoperhe $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ on joukon A **peite**. Ulkomitan määritelmän mukaan tällöin pätee, että $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$.

(b) Jos $\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) = \infty$ kaikille joukon A peitteille, niin myös $m^*(A) = \infty$.

(c) Rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ **Jordanin ulkosisältö** $c^*(A)$ määritellään asettamalla

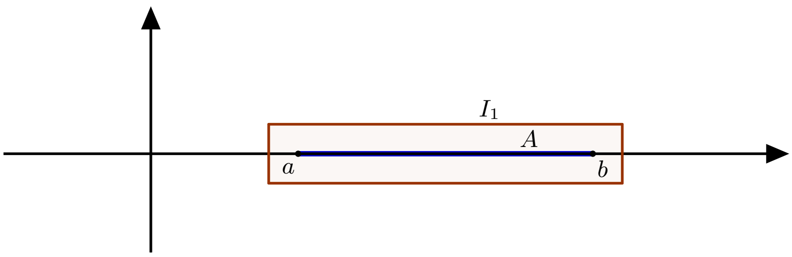
$$c^*(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{N} v(I_i) : N \in \mathbb{N},\ I_1, \dots, I_N \in \mathcal{K}_n \text{ ja } A \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right\}.$$

Toisin sanoen, tässä sallitaan vain äärelliset peitteet. Kaikille rajoitetuille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee, että $c^*(A) \geq m^*(A)$, ja jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, niin $c^*(A) = m^*(A)$; perustelut jätetään harjoitustehtäviksi. Ulkosisällöllä c^* ei kuitenkaan ole kaikkia niitä hyviä ominaisuuksia, joita ulkomitalla m^* on, ja siksi emme sitä juuri tämän enempää käsittele.

Esimerkki 2.3. (a) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin $m^*(A) = 0$. Tämä perustellaan oleellisesti samoin kuin Esimerkissä 1.1; yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

(b) Mikä on janan A ulkomitta $m^*(A)$?

Tämä riippuu tietysti siitä, missä ulottuvuudessa janaa mitataan! Jos $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, niin $m^*(A) = m_1^*(A) = b - a > 0$; tämä seuraa esimerkiksi Lauseesta 2.7. Jos taas $A \subset \mathbb{R}^2$, niin $m^*(A) = m_2^*(A) = 0$, ja sama pätee myös kaikille $n \geq 2$.



Olkoon esimerkiksi $A = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Kun $\varepsilon > 0$, valitaan $I_1 =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ ja $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$. Tällöin $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ (koska $A \subset I_1$) ja $I_i \in \mathcal{K}$ kaikille $i \in N$. Siten

$$\begin{aligned} m^*(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) = v(I_1) = \big(b + \varepsilon - (a - \varepsilon)\big)\big(\varepsilon - (-\varepsilon)\big) \\ &= (b - a + 2\varepsilon)2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, täytyy olla $m^*(A) = 0$, sillä $(b - a + 2\varepsilon)2\varepsilon \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$.

2.2. **Ulkomitan perusominaisuuksia**

Seuraavassa lauseessa esiintyvät Lebesguen ulkomitan tärkeimmät perusominaisuudet toimivat myöhemmin MIT 2 -kurssilla abstraktien ulkomittojen määritelmänä.

Lause 2.4. *Lebesguen ulkomitalle m^* pätee:*

(a) $m^*(\emptyset) = 0$.

(b) *Jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.* (monotonisuus)

(c) *Jos $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$, niin*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j). \qquad \text{((numeroituva) subadditiivisuus)}$$

Todistus. (a) Tämä on selvää, koska $v(\emptyset) = 0$. (Voidaan valita $I_i = \emptyset$ kaikille $i \in \mathbb{N}$.)

(b) Olkoot $I_i \in \mathcal{K}$ siten, että $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Tällöin myös $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, joten ulkomitan määritelmän perusteella on

$$m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i).$$

Koska tämä pätee kaikille joukon B peitteille, seuraa tästä infimumin määritelmän nojalla, että $m^*(A) \leq m^*(B)$, kuten haluttiinkin.

(c) Jos $m^*(A_j) = \infty$ jollekin $j \in \mathbb{N}$ on väite selvä, sillä tällöin tietysti myös $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) = \infty$. Voidaan siis olettaa, että $m^*(A_j) < \infty$ kaikille $j \in \mathbb{N}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Lebesguen ulkomitan määritelmän nojalla jokaiselle joukolle A_j voidaan tällöin valita välit $I_{i,j}$ siten, että $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{i,j}$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(I_{i,j}) \leq m^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon. \tag{4}$$

Tällöin

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_{i,j},$$

joten ulkomitan määritelmän, Lemman 1.6, arvion (4) sekä geometrisen summan kaavan nojalla

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &\leq \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} v(I_{i,j}) \overset{\text{L.1.6}}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} v(I_{i,j}) \\ &\overset{(4)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, seuraa (c)-kohdan väite kun annetaan $\varepsilon \to 0$. $\square$

Huomautus. (a) Lauseen 2.4 (c)-kohdasta seuraa myös *äärellinen subadditiivisuus*: Jos $A_1, A_2, \dots, A_N \subset \mathbb{R}^n$, niin

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{N} m^*(A_j).$$

syy: Voidaan valita $A_j = \emptyset$, kun $j \ge N+1$.

(b) *Ylinumeroituva subadditiivisuus* ei yleensä toimi: Tiedetään, että $m^*(\{x\}) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$. Jos ylinumeroituva subadditiivisuus olisi voimassa, saataisiin

$$m^*(\mathbb{R}^n) = m^*\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}\right) \le \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \underbrace{m^*(\{x\})}_{=0} = 0,$$

ja siten olisi $m^*(\mathbb{R}^n) = 0$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $m^*(\mathbb{R}^n) = \infty$, minkä voi osoittaa esimerkiksi Lauseen 2.7 avulla; tarkempi perustelu jätetään harjoitustehtäväksi.

(c) Jordanin ulkosisältö c^* on äärellisesti subadditiivinen, mutta c^* **ei ole** numeroituvasti subadditiivinen (harjoitustehtävä).

Seuraavana tavoitteenamme on osoittaa, että jokaisen välin $I \subset \mathbb{R}^n$ ulkomitta $m^*(I)$ on sama, kuin sen geometrinen mitta $v(I)$ (Lause 2.7). Tämän tuloksen todistusta varten muotoilemme kaksi aputulosta, jotka perustuvat suoraan geometrisen mitan määritelmään.

Lemma 2.5. *Olkoon $I = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ n-väli ja olkoot välin $I^{(k)} \subset \mathbb{R}$ päätepisteet $a_k < b_k$. Jos $a_k < c_k < b_k$ ja välin $I_1^{(k)}$ päätepisteet ovat a_k ja c_k, sekä välin $I_2^{(k)}$ päätepisteet ovat c_k ja b_k, niin n-väleille*

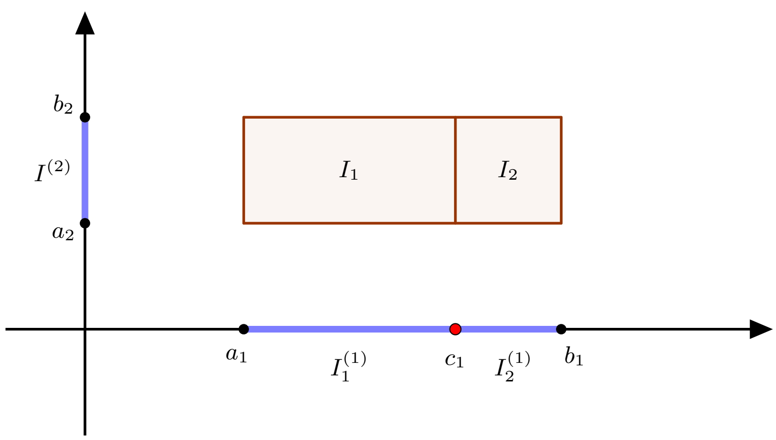
$$I_1 = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I_1^{(k)} \times \cdots \times I^{(n)}$$

ja

$$I_2 = I^{(1)} \times I^{(2)} \times \cdots \times I_2^{(k)} \times \cdots \times I^{(n)}$$

pätee, että $v(I) = v(I_1) + v(I_2)$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □



Seuraus 2.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ n-väli. Jaetaan jokainen koordinaattiväli $I^{(k)} \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$, äärellisen moneen osaväliin. Näiden osavälien karteesisten tulojen avulla myös väli I saadaan jaetuksi äärelliseen moneen n-väliin $I_1, I_2, \dots, I_M$, joille pätee, että joukot $\operatorname{int}(I_j)$ ovat erillisiä ja $\overline{I} = \bigcup_{j=1}^{M} \overline{I}_j$. Tällöin*

$$v(I) = \sum_{j=1}^{M} v(I_j).$$

Todistus. Seuraa Lemmasta 2.5 sopivan induktion avulla. $\square$

Huomautus. Seurauksen 2.6 tilanteessa ei ole väliä, kuuluvatko osavälien I_j sivut väleihin vai eivät.

Nyt voimme muotoilla tärkeän välien ulkomittaa koskevan tuloksen.

Lause 2.7. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ n-väli. Tällöin $m^*(I) = v(I)$.*

Todistus. **Tapaus 1:** I on suljettu joukko. Jos I on rajoittamaton, voi I olla surkastunut, jolloin $m^*(I) = v(I) = 0$, mutta muuten tässä tapauksessa $m^*(I) = v(I) = \infty$; tarkemmat perustelut ovat harjoitustehtäviä. Siten väite pätee rajoittamattomille suljetuille väleille.

Oletetaan sitten, että I on suljettu ja rajoitettu, jolloin

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

missä $-\infty < a_k \leq b_k < \infty$ kaikille $k = 1, 2, \dots, n$.

"$\leq$": Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan

$$I_\varepsilon =]a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[\times]a_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon[\times \cdots \times]a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon[.$$

Tällöin $I_\varepsilon \in \mathcal{K}$ ja $I \subset I_\varepsilon$, joten Lebesguen mitan määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} m^*(I) \leq v(I_\varepsilon) &= \big(b_1 + \varepsilon - (a_1 - \varepsilon)\big)\big(b_2 + \varepsilon - (a_2 - \varepsilon)\big) \dots \big(b_n + \varepsilon - (a_n - \varepsilon)\big) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = v(I). \end{aligned}$$

Näin ollen $m^*(I) \leq v(I)$.

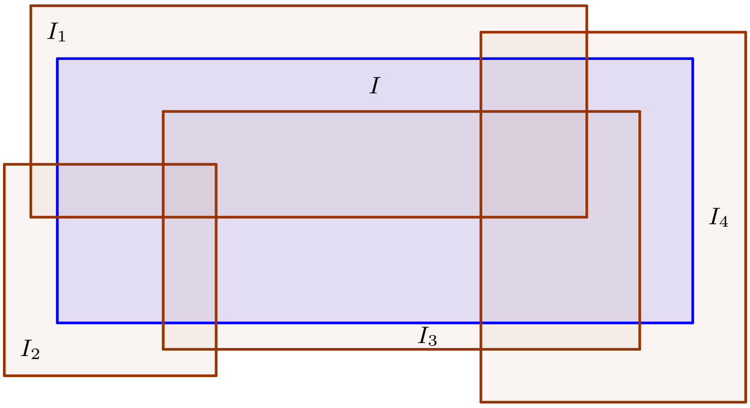
"$\geq$": Oletetaan, että $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, missä $I_i \in \mathcal{K}$ kaikille $i \in \mathbb{N}$. Koska I on suljettu ja rajoitettu joukko, on I kompakti, jolloin kompaktien joukkojen peiteominaisuuden (katso Kappale 1.3.2) perusteella on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että itse asiassa $I \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Käytetään tässä yhteydessä välien I_i koordinaattiväleille merkintää

$$I_i^{(k)} =]a_i^{(k)}, b_i^{(k)}[,$$

jolloin siis

$$I_i =]a_i^{(1)}, b_i^{(1)}[\times]a_i^{(2)}, b_i^{(2)}[\times \cdots \times]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[.$$

Tutkitaan nyt välin I jakoa osaväleihin, jotka saadaan, kun jokaiselle $k = 1, 2, \dots, n$ välin I koordinaattiväli $I^{(k)}$ jaetaan (äärelliseen määrään) avoimia osavälejä kaikkien koordinaattivälien $I_i^{(k)}$ päätepisteiden $a_i^{(k)}$ ja $b_i^{(k)}$ avulla; katso Kuva 1. Olkoot

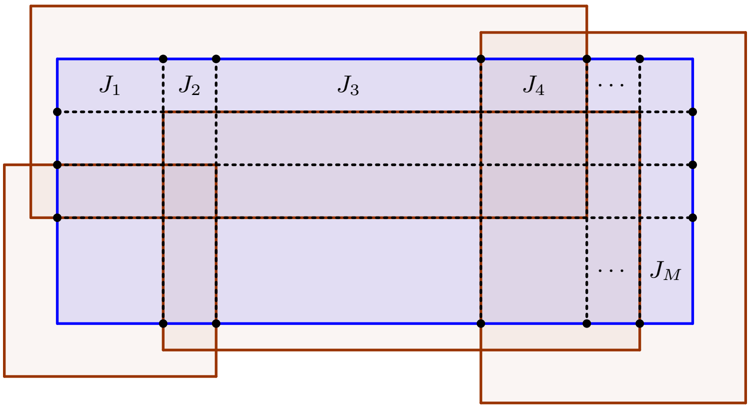


Väli I ja äärellinen peite $\bigcup_{i=1}^{4} I_i$

näin saadut välin I avoimet osavälit $J_1, J_2, \ldots, J_M$, $M \in \mathbb{N}$, jolloin Seurauksen 2.6 perusteella

$$v(I) = \sum_{j=1}^{M} v(J_j). \tag{5}$$

Toisaalta välit J_j ovat erillisiä ja jokainen väli J_j sisältyy ainakin yhteen väleistä



Kuva 1. Pisteiden $a_i^{(k)}$ ja $b_i^{(k)}$ avulla saatu välin I jako osaväleihin $J_1, J_2, \ldots, J_M$ (kuvan tapauksessa $M = 24$)

I_i, mistä saadaan (jälleen Seurausta 2.6 apuna käyttäen), että

$$\sum_{j=1}^{M} v(J_j) \leq \sum_{i=1}^{N} v(I_i). \tag{6}$$

Yhdistämällä edelliset tiedot (5) ja (6) nähdään, että

$$v(I) \leq \sum_{i=1}^{N} v(I_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_i), \tag{7}$$

missä jälkimmäinen epäyhtälö seuraa suoraan siitä, että $v(I_i) \geq 0$ kaikille $i \in \mathbb{N}$. Kun kaavassa (7) otetaan infimum yli kaikkien välin I peitteiden, saadaan Lebesguen ulkomitan määritelmän mukaan, että $v(I) \leq m^*(I)$ eli $m^*(I) \geq v(I)$, kuten haluttiinkin.

Tapaus 2: I on avoin joukko, jolloin

$$I =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[,$$

missä $-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$ kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$.

"$\leq$" Koska nyt $I \in \mathcal{K}$ ja $I \subset I$, saadaan suoraan Lebesguen ulkomitan määritelmästä, että $m^*(I) \leq v(I)$.

"$\geq$" Olkoot $a_k < \widehat{a}_k < \widehat{b}_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin väli

$$\widehat{I} = [\widehat{a}_1, \widehat{b}_1] \times [\widehat{a}_2, \widehat{b}_2] \times \cdots \times [\widehat{a}_n, \widehat{b}_n]$$

on suljettu ja rajoitettu ja $\widehat{I} \subset I$. Siten ulkomitan monotonisuuden ja jo todistetun tapauksen 1 perusteella pätee, että

$$\begin{aligned} m^*(I) &\geq m^*(\widehat{I}) = v(\widehat{I}) = (\widehat{b}_1 - \widehat{a}_1)(\widehat{b}_2 - \widehat{a}_2) \ldots (\widehat{b}_n - \widehat{a}_n) \\ &\xrightarrow[\widehat{b}_k \to b_k]{\widehat{a}_k \to a_k} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n) = v(I); \end{aligned}$$

rajankäynnissä siis $\widehat{a}_k \to a_k$ ja $\widehat{b}_k \to b_k$ kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$. Tästä seuraa, että $m^*(I) \geq v(I)$.

Tapaus 3: I on mikä tahansa väli. Tällöin $\operatorname{int}(I) \subset I \subset \overline{I}$, missä $\operatorname{int}(I)$ on avoin ja $\overline{I}$ on suljettu, ja siten jo todistettujen tapausten (T1) ja (T2), ulkomitan monotonisuuden sekä geometrisen mitan määritelmän nojalla

$$v(I) = v(\operatorname{int}(I)) \overset{(T1)}{=} m^*(\operatorname{int}(I)) \leq m^*(I) \leq m^*(\overline{I}) \overset{(T2)}{=} v(\overline{I}) = v(I).$$

Näin ollen $m^*(I) = v(I)$. □

Huomautus 2.8. (a) Ulkomitta m^* on siirtoinvariantti, kuten haluttiinkin: Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, niin

$$m^*(A + x) = m^*(A).$$

Tämän todistus on harjoitustehtävä ja se perustuu siihen, että välien geometrinen mitta nähdään helposti siirtoinvariantiksi.

(b) Jos $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus ja $A \subset \mathbb{R}^n$, niin

$$m^*(L(A)) = |\det L|\, m^*(A).$$

Tämän todistus on kuitenkin aika pitkä ja tekninen, ja se ohitetaan tällä kurssilla.

(c) Erikoistapaus (b)-kohdasta on se, missä L on venytys. Tämä tulos voidaan muotoilla myös seuraavasti, todistus jätetään harjoitustehtäväksi: Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$, ja merkitään $tA = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta,\ a \in A\}$. Tällöin

$$m^*(tA) = t^n m^*(A).$$

Lebesguen ulkomitta toteuttaa siis luvun alussa esitellyt ominaisuudet (i) ja (ii): se on määritelty kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $m^*(A) \in [0, \infty]$, ja lisäksi m^* on siirtoinvariantti. Ominaisuutta (iii) eli additiivisuutta ei kuitenkaan saada voimaan kaikille erillisille joukoille, sillä on olemassa $A, B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \cap B = \emptyset$, mutta

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Additiivisuus saadaan kuitenkin toimimaan, kun rajoitutaan tarkastelemaan vain niin sanottuja mitallisia joukkoja, joihin tutustutaan seuraavassa luvussa. Yllä mainittujen joukkojen A ja B olemassaolo seuraa puolestaan helposti epämitallisten joukkojen olemassaolosta; katso Lauseet 3.10 ja 3.12.

***Huomautus 2.9.** Ulkomitalle m^* pätee kuitenkin seuraava additiivisuusominaisuus: Jos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A,\ b \in B\} > 0$$

eli joukkojen A ja B etäisyys on aidosti positiivinen, niin

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Tähän ominaisuuteen tutustutaan tarkemmin MIT 2 -kurssilla *metristen ulkomittojen* yhteydessä; katso Luku 13.

3. Mitalliset joukot

3.1. Mitallisuus

Mitalliset joukot ovat täsmälleen niitä joukkoja, jotka käyttäytyvät "hyvin" ulkomitan m^* suhteen. Seuraava määritelmä saataa vaikuttaa ensinäkemältä hieman abstraktilta, mutta se on osoittatunut juuri oikeaksi ja käyttökelpoiseksi tavaksi ilmaista, mitä "hyvin käyttäytyminen" tässä yhteydessä tarkalleen ottaen tarkoittaa.

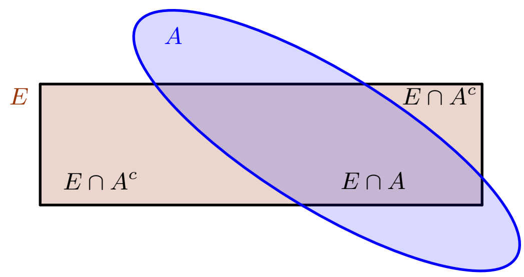
Määritelmä 3.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on **Lebesgue-mitallinen**, jos kaikille joukoille $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c). \tag{8}$$

(Muista, että $E \cap A^c = E \setminus A$.)

Kaikkien avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallisten joukkojen kokoelmaa merkitään

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}.$$



Jatkossa puhutaan usein lyhyesti vain mitallisuudesta ja mitallisista joukoista, mutta koko MIT 1 -kurssin ajan tällä tarkoitetaan nimen omaan Lebesgue-mitallisuutta. MIT 2 -kurssilla tilanne onkin sitten hieman toinen.

Huomautus. (a) Ehto (8) tunnetaan nimellä *Carathéodoryn ehto*. Sen esitti Constantin Carathéodory (*Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή*) vuonna 1918. Tämä ehto siis sanoo, että jokainen joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ jakautuu mitallisen joukon A avulla "siististi" kahteen osaan $E \cap A$ ja $E \cap A^c = E \setminus A$.

(b) Koska $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, on ulkomitan subadditiivisuuden nojalla aina

$$m^*(E) = m^*\big((E \cap A) \cup (E \cap A^c)\big) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Siten joukon A mitallisuutta osoitettessa riittää näyttää, että

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \tag{9}$$

kaikille joukoille $E \subset \mathbb{R}^n$.

(c) Myöhemmin osoitetaan, että itse asiassa ehdossa (8) (tai (9)) riittää tutkia vain tapaukset, jossa $E \subset \mathbb{R}^n$ on n-väli (Lemma 3.13). Samoin osoitetaan, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, jos ja vain jos A on "melkein" avoin joukko eli jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset U_\varepsilon$ ja $m^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$ (Lause 4.8). Joskus tätä jälkimmäistä ominaisuutta käytetään myös Lebesgue-mitallisuuden määritelmänä.

Suoraan Carathéodoryn ehdosta (8) nähdään, että joukot $\mathbb{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat mitallisia (totea!). Mitallisia joukkoja on TODELLA paljon muitakin. Esimerkiksi kaikki *nollamittaiset* joukot ovat mitallisia:

Lause 3.2. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jolle $m^*(A) = 0$. Tällöin $A \in \mathcal{M}_n$.*

Todistus. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Koska $E \cap A \subset A$ ja $E \cap A^c \subset E$, saadaan ulkomitan monotonisuuden ja oletuksen $m^*(A) = 0$ nojalla, että

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(A) + m^*(E) = 0 + m^*(E) = m^*(E).$$

Siispä ehto (9) pätee kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$, ja näin ollen joukko A on mitallinen. $\square$

Olemme jo nähneet useita esimerkkejä nollamittaista joukoista, esimerkiksi $\mathbb{Q}$ (numeroituva) ja $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ (ylinumeroituva). Seuraava klassinen esimerkki antaa nollamittaisen, kompaktin ja ylinumeroituvan joukon $C \subset \mathbb{R}$.

Esimerkki 3.3 (Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko)**.** Olkoon $C_0 = [0, 1]$. Poistetaan välin C_0 keskimmäinen (avoin) kolmasosa $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, jolloin jäljelle jää kaksi suljettua väliä $J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ja $J_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Merkitään

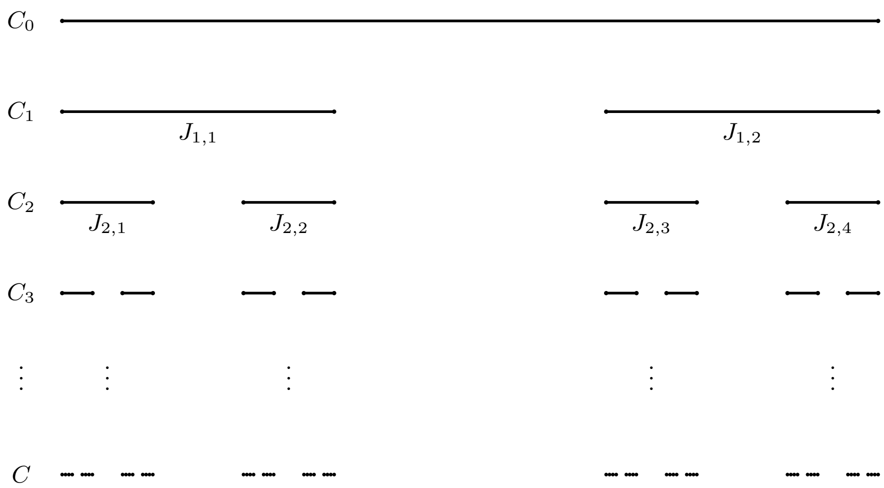
$$C_1 = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right] = J_{1,1} \cup J_{1,2} \subset C_0.$$

Konstruktion seuraavassa vaiheessa poistetaan välien $J_{1,1}$ ja $J_{1,2}$ keskimmäiset avoimet kolmannekset. Tällöin saadaan joukko C_2, joka koostuu neljästä suljetusta välistä,

$$C_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}\right] \cup \left[\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right] = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4} \subset C_1.$$

Seuraavassa vaiheessa $C_3 \subset C_2$ koostuu kahdeksasta suljetusta välistä $J_{3,i}$, $i = 1, 2, \ldots 8$, joiden jokaisen pituus on $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, ja niin edelleen.

Vaiheessa k edellisen vaiheen väleistä $J_{k-1,i}$, $i = 1, 2, \ldots 2^{k-1}$, poistetaan keskimmäiset avoimet kolmannekset. Näin saadaan joukko $C_k \subset C_{k-1} \subset \ldots \subset C_0$, joka koostuu 2^k kappaleesta suljettuja välejä $J_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots 2^k$, joiden jokaisen pituus on $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Huomaa, että joukkojen sisäkkäisyyden takia $C_k = \bigcap_{j=1}^k C_j$.



Nyt varsinainen **Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko** C (*Cantor's dust*) määritellään asettamalla

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} J_{k,i}.$$

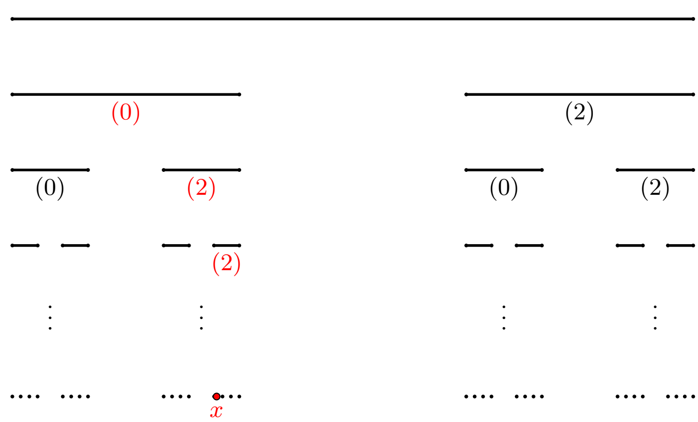
Joukon C konstruktion julkaisi Georg Cantor vuonna 1883. Henry Smith oli tosin esittänyt samankaltaisen konstruktion jo vuonna 1875.

Joukolla C on seuraavat ominaisuudet:

- C on suljettu joukko, koska se on suljettujen joukkojen C_k leikkaus, ja C on rajoitettu, koska $C \subset [0,1]$. Siten C on kompakti.
- $m^*(C) = 0$. Tämän perustelu on harjoitustehtävä; apuna voi käyttää ulkomitan perusominaisuuksia sekä tietoa, että

$$C \subset C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} J_{k,i}$$

  kaikille $k \in \mathbb{N}$.
- Joukko C on mitallinen eli $C \in \mathcal{M}_1$ (Lause 3.2).
- Joukolla C ei ole sisäpisteitä, sillä muuten olisi $m^*(C) > 0$ (harjoitustehtävä).
- $C \neq \emptyset$. Huomataan, että ainakin jokaisen vaiheen välien $J_{k,i}$ päätepisteet, esimerkiksi 0, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{7}{9}$, kuuluvat kaikkiin joukkoihin C_k, joten ainakin nämä pisteet ovat myös joukossa C. Osoittautuu, että joukossa C täytyy olla todella paljon muitakin pisteitä, sillä välien $J_{k,i}$ päätepisteitä on vain numeroituva määrä, kun taas joukolle C pätee:
- C on ylinumeroituva! Perustelun idea on seuraava: Jokaiselle $x \in C$ saadaan konstruktiosta yksikäsitteinen "osoite" sen mukaan, mennäänkö kussakin konstruktiovaiheessa vasemman- (0) vai oikeanpuoleiseen (2) osaväliin. Jos esimerkiksi pisteen $x \in C$ osoite on $022002\ldots$, kuuluu x väleihin $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ (0), $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$ (2), $\left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right]$ (2), $\left[\frac{24}{81}, \frac{25}{81}\right]$ (0), ja niin edelleen.



Näitä numeroista 0 ja 2 koostuvia osoitekoodeja on ylinumeroituva määrä, minkä voi osoittaa diagonaaliargumentilla aivan samaan tapaan kuin reaalilukujen joukon ylinumeroituvuuden (harjoitustehtävä). Koska jokaista mahdollista osoitekoodia vastaa yksikäsitteinen piste $x \in C$, täytyy siis myös joukon C olla ylinumeroituva.

Itse asiassa on aika helppo nähdä, että jos pisteen $x \in C$ osoite on $d_1 d_2 d_3 \ldots$, missä $d_k \in \{0, 2\}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k.$$

Tämän esityksen avulla voidaan esimerkiksi osoittaa, että $\frac{1}{4} \in C$. Huomaa, että $\frac{1}{4}$ ei voi olla minkään konstruktiovälin $J_{k,i}$ päätepiste, koska näiden nimittäjä on aina kolmella jaollinen (poislukien pisteet 0 ja 1).

3.2. **Mitallisuus ja joukko-operaatiot**

Tutkitaan seuraavaksi, kuinka mitallisuus säilyy joukko-operaatioissa.

Lemma 3.4. *Olkoot $A \in \mathcal{M}_n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin myös $A + x \in \mathcal{M}_n$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lemma 3.5. *Oletetaan, että $A, B \in \mathcal{M}_n$. Tällöin myös*

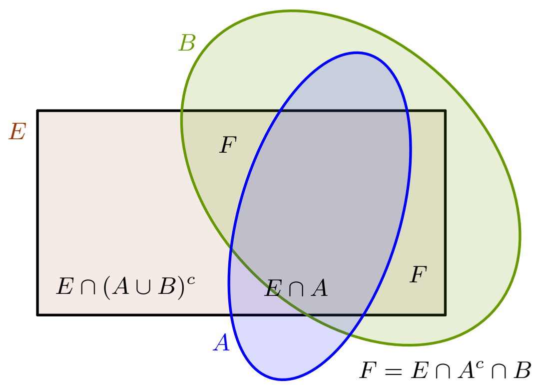
(a) $A^c \in \mathcal{M}_n$

(b) $A \cup B \in \mathcal{M}_n$

(c) $A \cap B \in \mathcal{M}_n$

(d) $A \setminus B \in \mathcal{M}_n$.

Todistus. (a) Koska $(A^c)^c = A$, seuraa tämä suoraan Carathéodoryn ehdosta (8) joukolle A.



(b) Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Koska $A \in \mathcal{M}_n$, saadaan Carathéodoryn ehdosta (8), että

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + \underbrace{m^*(E \cap A^c)}_{(*)}. \tag{10}$$

Koska $B \in \mathcal{M}_n$, voidaan termiä $(*)$ arvioida edelleen Carathéodoryn ehdon (8) avulla, mutta nyt käyttäen testijoukkoa $E \cap A^c \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(*) &= m^*(E \cap A^c) = m^*\big((E \cap A^c) \cap B\big) + m^*\big((E \cap A^c) \cap B^c\big) \\ &= m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap (A \cup B)^c),\end{aligned}$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa De Morganin kaavasta, koska

$$(E \cap A^c) \cap B^c = E \cap (A^c \cap B^c) = E \cap (A \cup B)^c.$$

Kun termille $(*)$ saatu lauseke sijoitetaan kaavaan (10), saadaan ulkomitan m^* subadditiivisuuden sekä yhtälön

$$(E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B) = E \cap (A \cup B) \qquad \text{(mieti!)}$$

avulla, että

$$\begin{aligned}m^*(E) &= \underbrace{m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B)}_{\geq m^*\big((E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B)\big)} + m^*(E \cap (A \cup B)^c) \\ &\geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c).\end{aligned}$$

Tämä on Carathódoryn ehdon hankalampi puoli (9) joukolle $A \cup B$, ja siten tämän joukon mitallisuus on todistettu.

(c) Koska $A, B \in \mathcal{M}_n$, niin (a)-kohdan mukaan myös $A^c, B^c \in \mathcal{M}_n$, joten (b)-kohdan nojalla $A^c \cup B^c \in \mathcal{M}_n$. Tällöin De Morganin säännön ja (a)-kohdan perusteella saadaan

$$A \cap B = (\underbrace{A^c \cup B^c}_{\in \mathcal{M}_n})^c \in \mathcal{M}_n.$$

(d) Koska $B \in \mathcal{M}_n$, niin (a)-kohdan nojalla $B^c \in \mathcal{M}_n$. Tällöin (c)-kohdan perusteella myös

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}_n,$$

kuten haluttiin. $\square$

Huomautus 3.6. Lemman 3.5 (b)- ja (c)-kohdat yleistyvät helpon induktion avulla myös mitallisten joukkojen *äärellisille* yhdisteille ja leikkauksille. Toisin sanoen, jos $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{M}_n$, niin myös

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{M}_n$$

ja

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N = \bigcap_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{M}_n.$$

Sen sijaan näiden tulosten yleistykset numeroituville yhdisteille ja leikkauksille vaativat enemmän työtä; näitä käsitellään seuraavassa lauseessa. Erittäin oleellinen on myös lauseen (c)-kohta, joka kertoo, että ulkomitta m^* on numeroituvasti additiivinen mitallisten joukkojen suhteen.

Lause 3.7. *Oletetaan, että $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_n$. Tällöin*

(a) $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}_n$

(b) $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}_n$

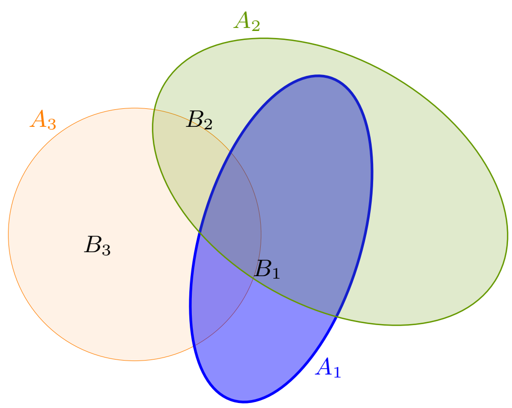
(c) *jos joukot A_j ovat lisäksi erillisiä, niin*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

Todistus. (a) Merkitään $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja määritellään apujoukot

$$B_1 = A_1 \ \in \mathcal{M}_n \quad (\text{oletus})$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1 \ \in \mathcal{M}_n \quad (\text{Lemma 3.5 (d)})$$
$$\vdots$$
$$B_j = A_j \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{j-1}) = A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \ \in \mathcal{M}_n, \ j = 2, 3, \ldots,$$

missä $B_j \in \mathcal{M}_n$ pätee Lemman 3.5 (d)-kohdan ja Huomautuksen 3.6 perusteella.



Tällöin joukot B_j ovat erillisiä eli $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ aina, kun $j_1 \neq j_2$. Merkitään $S_N = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$. Tällöin joukkojen B_j määritelmän sekä Huomautuksen 3.6 perusteella pätee, että

$$S_N = \bigcup_{j=1}^{N} B_j = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \ \in \mathcal{M}_n \quad \text{kaikille } N \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi joukkojen B_j määritelmän nojalla myös

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A. \tag{11}$$

Olkoon sitten $E \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko. Osoitetaan induktiolla, että kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$m^*(E \cap S_N) = \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j). \tag{12}$$

Tapaus $N = 1$ on selvä, koska $S_1 = A_1 = B_1$.

Oletetaan sitten, että (12) pätee luvulle $N \in \mathbb{N}$, ja osoitetaan, että tällöin se pätee myös luvulle $N + 1$. Koska $S_N \in \mathcal{M}_n$, voidaan tähän soveltaa Carathéodoryn ehtoa (8) testijoukolle $E \cap S_{N+1} \subset \mathbb{R}^n$, ja saadaan

$$\begin{aligned} m^*(E \cap S_{N+1}) &= m^*\big(\underbrace{(E \cap S_{N+1}) \cap S_N}_{=E\cap S_N}\big) + m^*\big(\underbrace{(E \cap S_{N+1}) \cap (S_N)^c}_{=E\cap B_{N+1}}\big) \\ &= m^*(E \cap S_N) + m^*(E \cap B_{N+1}) \\ &\overset{(12)}{=} \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap B_{N+1}) = \sum_{j=1}^{N+1} m^*(E \cap B_j), \end{aligned}$$

missä $(E \cap S_{N+1}) \cap S_N = E \cap S_N$, sillä $S_N \subset S_{N+1}$, ja $(E \cap S_{N+1}) \cap (S_N)^c = E \cap B_{N+1}$, sillä $S_{N+1} \cap (S_N)^c = S_{N+1} \setminus S_N = B_{N+1}$. Tämä todistaa induktioväitteen ja näin ollen kaava (12) pätee kaikille $N \in \mathbb{N}$.

Käyttämällä kaavaa (12) sekä ulkomitan m^* monotonisuutta ($S_N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$) ja subadditiivisuutta nähdään, että kaikille $N \in \mathbb{N}$ on

$$\sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) = m^*(E \cap S_N) \le m^*\Bigg(\underbrace{E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}_{=\bigcup_{j=1}^{\infty}(E\cap B_j)}\Bigg) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j).$$

Kun vasemmalla puolella annetaan $N \to \infty$, saadaan raja-arvon suppiloperiaatteen sekä kaavan (11) nojalla

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) = m^*\Bigg(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Bigg) = m^*(E \cap A). \tag{13}$$

Koska tiedetään, että joukko $S_N = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ on mitallinen, toteuttaa se Carathéodoryn ehdon (8) testijoukolle E, jolloin kaavan (12) sekä ulkomitan m^* monotonisuuden avulla saadaan, että kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$m^*(E) = m^*(E \cap S_N) + m^*(E \cap (S_N)^c) \ge \sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap A^c); \tag{14}$$

tässä monotonisuuden käyttö perustuu siis siihen, että $E \cap (S_N)^c \supset E \cap A^c$ koska $S_N \subset A$. Toisaalta kaavan (13) perusteella

$$\sum_{j=1}^{N} m^*(E \cap B_j) \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) \overset{(13)}{=} m^*(E \cap A).$$

Jos siis kaavan (14) oikealla puolella annetaan $N \to \infty$, päädytään arvioon

$$m^*(E) \ge m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Tämä on juuri Carathódoryn ehdon hankalampi puoli (9), ja siten joukon A mitallisuus on todistettu.

(b) DeMorganin säännön avulla

$$\bigcap_{i=j}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_j^c\right)^c.$$

Koska $A_j^c \in \mathcal{M}_n$ kaikille $j \in \mathbb{N}$ (Lemma 3.5(a)), niin (a)-kohdan nojalla myös $\bigcup_{i=j}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{M}_n$, ja väite seuraa Lemman 3.5 (a)-kohdasta.

(c) Jos joukot A_j ovat erillisiä, pätee (a)-kohdan todistuksessa, että $B_j = A_j$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Tällöin kaavassa (13) voidaan valita $E = \mathbb{R}^n$ ja saadaan

$$m^*(A) = m^*(\mathbb{R}^n \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j),$$

kuten haluttiin. □

***Huomautus 3.8.** Olkoon X joukko ja olkoon $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ joukkoperhe, jolle pätee, että $\emptyset, X \in \Gamma$, ja joka toteuttaa Lemman 3.5 (a)-kohdan sekä Lauseen 3.7 (a)-kohdan; toisin sanoen, jos $A \in \Gamma$, niin myös $A^c = X \setminus A \in \Gamma$, ja jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$, niin myös $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$. Tällöin sanotaan, että Γ on *σ-algebra* [sigma-algebra] joukossa X (katso MIT 2 -kurssin Kappale 11.1).

3.3. Mitallisia ja epämitallisia joukkoja

Pian tulemme osoittamaan, että mitallisia joukkoja on todella paljon. Itse asiassa lähes kaikki "luonnollisissa yhteyksissä" vastaan tulevat joukot, esimerkiksi avoimet ja suljetut joukot sekä näiden yhdisteet ja leikkaukset, ovat mitallisia. Näytetään kuitenkin ensin, että on olemassa myös *epämitallisia* joukkoja. Tässä yhteydessä tarvitsemme apuna ekvivalenssirelaatioita, joten kerrataan näiden määritelmä.

Määritelmä 3.9. (a) Joukossa X määritelty relaatio '$\sim$' on **ekvivalenssirelaatio**, jos kaikille $a, b, c \in X$ pätee, että

- $a \sim a$ (refleksiivisyys)
- jos $a \sim b$, niin $b \sim a$ (symmetrisyys)
- jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$. (transitiivisuus)

(b) Joukko $[a] = \{b \in X : a \sim b\} \subset X$ on alkion $a \in X$ määräämä **tekijäluokka**.

Tekijä- eli ekvivalenssiluokille pätee, että $[a] = [b]$ jos ja vain jos $a \sim b$, ja $[a] \cap [b] = \emptyset$ jos ja vain jos $a \not\sim b$.

Seuraavan epämitallisen joukon konstruktion esitti Giuseppe Vitali vuonna 1905.

Lause 3.10. *On olemassa joukko $A \subset \mathbb{R}$ siten, että $A \notin \mathcal{M}_1$. (Vastaava pätee myös kaikille $n \geq 2$).*

Todistus. Määritellään reaaliluvuille relaatio '$\sim$' asettamalla $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Tällöin '$\sim$' on ekvivalenssirelaatio (harjoitustehtävä), joten kaikille $x \in \mathbb{R}$ on olemassa ekvivalenssiluokka

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}.$$

Kun $x \in \mathbb{R}$, on joukossa $[x]$ varmasti ainakin yksi alkio, joka on välillä $[0, 1]$. Tämä seuraa siitä, että löytyy $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $k \leq x \leq k + 1$, ja tällöin $0 \leq x - k \leq 1$ ja $x - k \in [x]$ koska $x - (x - k) = k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Olkoon nyt $A \subset [0, 1]$ joukko, johon on VALITTU tasan yksi edustaja jokaisesta luokasta $[x]$, $x \in \mathbb{R}$. Tämä valinta onnistuu niin sanotun *valinta-aksioomaan* avulla; katso *Huomautus 3.11.

Osoitetaan, että tällöin pätee $A \notin \mathcal{M}_1$. Tehdään antiteesi, että A olisikin mitallinen. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(i) $A + q$ on mitallinen kaikille $q \in \mathbb{Q}$ Lemman 3.4 perusteella.

(ii) Kun $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ja $q_1 \neq q_2$, niin $(A + q_1) \cap (A + q_2) = \emptyset$.

Perustelu: Jos olisi olemassa $x \in (A + q_1) \cap (A + q_2)$, niin tällöin $x = a_1 + q_1 = a_2 + q_2$ joillekin $a_1, a_2 \in A$, ja siten $a_1 - a_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$. Relaation '$\sim$' määritelmän mukaan olisi siis $a_1 \sim a_2$, ja koska joukossa A on tasan yksi edustaja jokaisesta ekvivalenssiluokasta, täytyy olla $a_1 = a_2$. Siispä myös $q_1 = q_2$ (koska $a_1 + q_1 = a_2 + q_2$), mikä on vastoin oletusta $q_1 \neq q_2$.

(iii) $m^*(A) = 0$.

Perustelu: Koska $A \subset [0, 1]$, niin $A + \frac{1}{k} \subset [0, 2]$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, ja siten myös $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A + \frac{1}{k}) \subset [0, 2]$. Kun $k_1 \neq k_2$, ovat joukot $A + \frac{1}{k_1}$ ja $A + \frac{1}{k_2}$ (ii)-kohdan mukaan erillisiä. Lisäksi nämä joukot ovat mitallisia ((i)-kohta), joten ulkomitan monotonisuuden, Lauseen 3.7 (c)-kohdan sekä ulkomitan siirtoinvarianssin perusteella

$$2 = m^*([0, 2]) \geq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A + \tfrac{1}{k})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A + \tfrac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A).$$

Tämä voi olla voimassa ainoastaan jos $m^*(A) = 0$, sillä viimeinen summa on ääretön mikäli $m^*(A) > 0$.

(iv) Kaikille $x \in \mathbb{R}$ on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ siten, että $x \in A + q$, joten $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}(A + q)$.

Perustelu: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Joukon A määritelmän nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että $a \in [x]$. Tällöin $a \sim x$, joten $x - a = q$ jollekin $q \in \mathbb{Q}$. Näin ollen $x = a + q \in A + q$.

Edellisten ominaisuuksien sekä ulkomitan subadditiivisuuden ja siirtoinvarianssin nojalla saadaan kuitenkin, että

$$\infty = m^*(\mathbb{R}) \overset{\text{(iv)}}{=} m^*\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}}(A + q)\right) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} m^*(A + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{m^*(A)}_{=0 \text{ (iii)}} = 0,$$

mikä on selvästi ristiriitaista. Näin ollen joukko A ei voi olla mitallinen. □

***Huomautus 3.11.** (a) Tarkalleen ottaen valinta-aksiooman (*Axiom of Choice*) sisältö on seuraava: Jos I on mikä tahansa indeksijoukko ja E_α on epätyhjä joukko kaikille $\alpha \in I$, niin voidaan valita alkiot $x_\alpha \in E_\alpha$ kaikille $\alpha \in I$. Tämä voi tuntua itsestään selvältä — kuten monien muidenkin aksioomien kohdalla — ja esimerkiksi jos I on äärellinen, voidaan tällainen valinta tehdä helposti induktion avulla. Ongelmia tulee kuitenkin silloin, jos I on ääretön eikä alkioiden $x_\alpha \in E_\alpha$ valintaa voida tehdä minkään tietyn säännön mukaan. Vaikka valinta-aksiooman sisältö tuntuu uskottavalta, ei sitä kuitenkaan voida todistaa muista joukko-opin perusaksioomista eli niin sanotuista Zermelo–Fraenkel (ZF)-aksioomista lähtien.

(b) Katsotaan vähän tarkemmin, miten valinta-aksioomaa käytetään Lauseen 3.10 todistuksessa. Konstruktion ekvivalenssiluokille pätee, että $[x] = x + \mathbb{Q}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Olkoon I näiden kaikkien ekvivalenssiluokkien kokoelma eli tekijäjoukko, toisin sanoen $I = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}$.

Merkitään kaikille $[x] \in I$, että $E_{[x]} = [x] \cap [0,1]$, jolloin siis $E_{[x]} \neq \emptyset$. Tällöin valinta-aksiooman nojalla voidaan kaikille $[x] \in I$ valita (tasan yksi) alkio $a_{[x]} \in E_{[x]}$. Haluttu epämitallinen joukko A koostuu näistä kaikista luokkien $[x]$ edustajista väliltä $[0,1]$ eli

$$A = \{a_{[x]} : [x] \in I\} \subset [0,1].$$

(c) Epämitallisen joukon konstruktio ei onnistu ilman valinta-aksioomaa. Robert Solovay osoitti nimittäin vuonna 1970, että joukko-opin (ZF)-aksioomille on olemassa malli, jossa valinta-aksiooma ei ole voimassa, mutta kaikki avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukot ovat Lebesgue-mitallisia.

Helppona seurauksena Lauseesta 3.10 saadaan erilliset joukot, joiden suhteen Lebesguen ulkomitta ei ole additiivinen.

Lause 3.12. *On olemassa joukot $A, B \subset \mathbb{R}$ siten, että $A \cap B = \emptyset$, mutta*

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Todistus. Harjoitustehtävä; muista että Carathódoryn ehto (8) **ei päde** epämitallisille joukoille! $\square$

Seuraava aputulos helpottaa mitallisuustarkasteluja, koska se rajoittaa tarvittavien testijoukkojen määrää.

Lemma 3.13. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain jos Carathéodoryn ehto*

$$m^*(J) = m^*(J \cap A) + m^*(J \cap A^c) \tag{15}$$

on voimassa kaikille avoimille n-väleille $J \subset \mathbb{R}^n$.

Todistus. On selvää, että mitalliselle joukolle $A \in \mathcal{M}_n$ ehto (15) pätee kaikille avoimille n-väleille $J \subset \mathbb{R}^n$, joten riittää osoittaa käänteinen suunta.

Olkoon siis $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jolle ehto (15) pätee aina kun J on avoin n-väli. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin Lebesguen ulkomitan määritelmän perusteella on olemassa avoimet n-välit $I_i \in \mathcal{K}$ siten, että

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

Siten ulkomitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden sekä oletuksen (15) (joukoille I_i) perusteella

$$\begin{aligned} m^*(E) &\le m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \\ &\le m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap A\right) + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \cap A^c\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i \cap A^c) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \big[m^*(I_i \cap A) + m^*(I_i \cap A^c)\big] \\ &\overset{(15)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i) \overset{\text{L.2.7}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \le m^*(E) + \varepsilon; \end{aligned}$$

huomaa, että tässä voi tietysti olla myös $I_i = \emptyset$ joillekin $i \in \mathbb{N}$. Koska tämä pätee kaikille $\varepsilon > 0$, täytyy olla

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

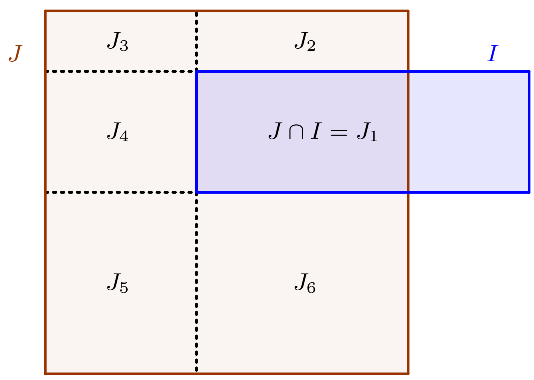
eli Carathéodoryn ehto (8) pätee kaikille $E \subset \mathbb{R}^n$. Näin ollen $A \in \mathcal{M}_n$. $\square$

Nyt on melko helppoa osoittaa kaikki välit mitallisiksi.

Lause 3.14. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ n-väli. Tällöin $I \in \mathcal{M}_n$.*

Todistus. Lemman 3.13 nojalla riittää osoittaa, että Carathéodoryn ehto (15) pätee joukolle I aina kun J on avoin n-väli. Olkoon siis J avoin n-väli. Voimme lisäksi olettaa, että $J \cap I \neq \emptyset$ ja $J \cap I^c \neq \emptyset$, sillä muuten ehto (15) on selvästi voimassa.

Jaetaan väli J erillisiin osaväleihin $J_1, J_2, \ldots, J_M$ välin I koordinaattivälien päätepisteiden avulla, jolloin siis $J = \bigcup_{j=1}^{M} J_j$. Joukko $J \cap I$ on myös n-väli, ja itse asiassa välit J_j voidaan valita siten, että $J \cap I = J_1$. Tällöin siis $J \cap I^c = \bigcup_{j=2}^{M} J_j$.



Näin ollen ulkomitan subadditiivisuuden, Lauseen 2.7 ja Seurauksen 2.6 perusteella

$$\begin{aligned} m^*(J\cap I)+m^*(J\cap I^c) &= m^*(J_1)+\underbrace{m^*\left(\bigcup_{j=2}^M J_j\right)}_{\le\sum_{j=2}^M m^*(J_j)} \\ &\le \sum_{j=1}^M m^*(J_j)=\sum_{j=1}^M v(J_j)=v(J)=m^*(J), \end{aligned}$$

ja väite seuraa Lemmasta 3.13. □

Välien mitallisuuden ja Lauseen 3.7 tietojen seurauksena saadaan osoitetuksi mitalliseksi erittäin suuri määrä joukkoja.

Lause 3.15. *Kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet ja suljetut joukot ovat (Lebesgue-) mitallisia, samoin kaikki joukot, jotka saadaan ottamalla äärellinen määrä numeroituvia yhdisteitä ja leikkauksia sekä komplementteja avoimista (tai suljetuista) joukoista lähtien.*

Todistus. Koska suljetut joukot ovat avoimien joukkojen komplementteja, riittää Lemman 3.5 nojalla osoittaa, että kaikki avoimet joukot ovat mitallisia. Olkoon siis $A\subset\mathbb{R}^n$ avoin joukko. Kun $x\in A$, on siis olemassa $r>0$ siten, että $B(x,r)\subset A$. Tällöin voidaan valita $N\in\mathbb{N}$ ja $\widetilde{x}=(q_1,q_2,\dots,q_n)\in\mathbb{Q}^n$, missä siis $q_k\in\mathbb{Q}$ kaikille $k=1,2,\dots,n$, siten, että

$$\begin{aligned} x\in I(x) &:=]q_1-\tfrac{1}{N},q_1+\tfrac{1}{N}[\times]q_2-\tfrac{1}{N},q_2+\tfrac{1}{N}[\times\cdots\times]q_n-\tfrac{1}{N},q_1+\tfrac{1}{N}[\\ &\subset B(x,r)\subset A; \end{aligned}$$

tarkemmat yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. Tällöin $A\subset\bigcup_{x\in A}I(x)\subset A$, joten $A=\bigcup_{x\in A}I(x)$. Toisaalta pisteitä $\widetilde{x}$ ja lukuja $N\in\mathbb{N}$ on vain numeroituva määrä, jolloin myös joukkoja $I(x)$ on numeroituva määrä, ja siten edellisessä yhdisteessä on vain numeroituva määrä eri joukkoja. Olkoot ne I_i, $i\in\mathbb{N}$, missä siis $I_i=I(x)$ jollekin $x\in A$. Lauseen 3.14 nojalla $I_i\in\mathcal{M}_n$ kaikille $i\in\mathbb{N}$, jolloin Lauseen 3.7 perusteella myös

$$A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}I_i\in\mathcal{M}_n.$$

□

Huomautus 3.16. Itse asiassa jokainen avoin joukko $A\subset\mathbb{R}^n$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä n-väleistä $I_i\subset\mathbb{R}^n$ Tämä onnistuu niin sanottujen *dyadisten kuutioiden* avulla; katso Lemma 17.2.

***Huomautus 3.17.** Avoimien joukkojen mitallisuudesta seuraa kaikkien niin sanottujen *Borel-joukkojen* mitallisuus. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukkojen kokoelma $\mathcal{B}_n$ on pienin σ-algebra (katso *Huomautus 3.8), joka sisältää kaikki avoimet joukot $A\subset\mathbb{R}^n$. Koska avoimet joukot ovat mitallisia ja mitallisten joukkojen kokoelma $\mathcal{M}_n$ on Lauseen 3.7 perusteella σ-algebra, täytyy siis olla $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{M}_n$. Huomaa, että σ-algebran määritelmän perusteella kaikki suljetut joukot ovat Borel-joukkoja, samoin kaikki joukot, jotka saadaan ottamalla äärellinen määrä numeroituvia yhdisteitä ja leikkauksia sekä komplementteja avoimista (tai suljetuista) joukoista lähtien; vertaa Lauseen 3.15 muotoiluun.

Kaikki mitalliset joukot eivät kuitenkaan ole Borel-joukkoja eli $\mathcal{B}_n \subsetneq \mathcal{M}_n$. Tämä perustellaan MIT 2 -kurssilla, jossa tutustutaan vähän tarkemmin σ-algebroihin ja Borel-joukkoihin (Kappale 11.1).

***Huomautus 3.18.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu n-väli siten, että $A \subset I$. Tällöin joukon A **Lebesguen sisämitta** voidaan määritellä luvuksi

$$m_*(A) = m^*(I) - m^*(I \setminus A).$$

Sisämitta $m_*(A)$ on hyvin määritelty eli se ei riipu valitusta n-välistä $I \supset A$. Kaikille rajoitetuille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_*(A) \leq m^*(A)$, mutta yhtäsuuruus $m_*(A) = m^*(A)$ pätee jos ja vain jos $A \in \mathcal{M}_n$. Näiden perustelut ovat harjoitustehtäviä.

Lebesguen alkuperäinen määritelmä sisämitalle oli oleellisesti

$$m_*(A) = \sup\{m^*(K) : K \text{ on kompakti ja } K \subset A\};$$

tämä johtaa samaan lopputulokseen yllä esitetyn määritelmän kanssa. Alun alkaen mitallisuus määriteltiin juuri ulko- ja sisämittojen yhtäsuuruuden avulla. Carathéodory kuitenkin huomasi, että mitallisuus voidaan esittää ehdon (8) mukaisesti käyttäen pelkkää ulkomittaa, ja tämän takia joukkojen sisämittoja ei yleensä tarvitse käsitellä.

4. Lebesguen mitta

Luvussa 2 määritelty Lebesguen ulkomitta $m^* = m_n^*$ on joukkofunktio $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, koska jokaiseen $A \subset \mathbb{R}^n$ liitetään luku $m^*(A) \in [0, \infty]$. Kun tämä funktio rajoitetaan mitallisten joukkojen kokoelmaan $\mathcal{M}_n$, saadaan varsinainen Lebesguen mitta.

Määritelmä 4.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ **Lebesguen mitta** $m = m_n$ on joukkofunktio

$$m : \mathcal{M} \to [0, \infty], \; m(A) = m^*(A) \; \text{ kaikille } A \in \mathcal{M}$$

eli

$$m_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty], \; m_n(A) = m_n^*(A) \; \text{ kaikille } A \in \mathcal{M}_n.$$

Tällöin seuraavat *mitan perusominaisuudet* ovat voimassa.

Lause 4.2. *Lebesguen mitalle* $m = m_n : \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ *pätee*

(a) $m(\emptyset) = 0$.

(b) *Jos* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_n$ *ovat erillisiä, niin*

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

Todistus. (a) Koska $\emptyset \in \mathcal{M}_n$, on $m(\emptyset) = m^*(\emptyset) = 0$ Lauseen 2.4 (a)-kohdan perusteella.

(b) Lauseen 3.7 (c)-kohdan nojalla erillisille mitallisille joukoille A_j pätee

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j).$$

Väite seuraa, koska mitallisille joukoille $m = m^*$ ja myös $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on mitallinen Lauseen 3.7 (a)-kohdan nojalla. □

Huomautus 4.3. Lauseen 4.2 (b)-kohdan numeroituva additiivisuus on siis voimassa vain erillisille mitallisille joukoille $A_j \in \mathcal{M}_n$. Jos joukot $A_j \in \mathcal{M}_n$ eivät ole erillisiä, pätee kuitenkin edelleen subadditiivisuus eli

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

Tämä seuraa suoraan Lebesguen ulkomitan subadditiivisuudesta, koska mitallisille joukoille $m = m^*$, sekä joukon $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mitallisuudesta.

Lause 4.4. *Kaikille* $A \in \mathcal{M}_n$ *ja kaikille* $x \in \mathbb{R}^n$ *pätee, että*

$$m(A + x) = m(A);$$

toisin sanoen, Lebesguen mitta m *on siirtoinvariantti.*

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$. Tällöin Lemman 3.4 perusteella myös $A + x \in \mathcal{M}_n$. Toisaalta Huomautuksen 2.8 (a)-kohdan nojalla $m^*(A + x) = m^*(A)$, jolloin siis myös $m(A + x) = m(A)$. □

***Huomautus 4.5.** Olkoon X joukko ja olkoon $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra joukossa X (Huomautus 3.8). Tällöin sanotaan, että joukkofunktio $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ on *mitta*, jos se toteuttaa Lauseen 4.2 ehdot eli $\mu(\emptyset) = 0$ ja jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ ovat erillisiä, niin

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Yleisiin mittoihin tutustutaan tarkemmin MIT 2 -kurssilla, katso Kappale 11.2.

Esimerkiksi seuraavassa lauseessa esiintyvät Lebesguen mitan laskusäännöt yleistyvät suoraviivaisesti kaikille muillekin mitoille.

Lause 4.6. (a) *Jos $A, B \in \mathcal{M}_n$, $A \subset B$ ja $m(A) < \infty$, niin*

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

(b) *Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ ja $A_j \in \mathcal{M}_n$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, niin*

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

(c) *Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ ja $A_j \in \mathcal{M}_n$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, ja lisäksi $m(A_1) < \infty$, niin*

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Todistus. (a) Koska $B = A \cup (B \setminus A)$, missä erilliset joukot A ja $B \setminus A$ ovat mitallisia (Lemma 3.5 (d)), on Lebesguen mitan additiivisuuden nojalla

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A).$$

Väite seuraa, kun $m(A) < \infty$ vähennetään molemmilta puolilta.

(b) Jos $m(A_j) = \infty$ jollekin $j \in \mathbb{N}$, on väite selvästi voimassa, joten voidaan olettaa, että $m(A_j) < \infty$ kaikille $j \in \mathbb{N}$.

Merkitään $B_1 = A_1$ ja $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ kun $j \geq 2$. Tällöin joukot B_j ovat mitallisia, joten (a)-kohdan mukaan

$$m(B_j) = m(A_j) - m(A_{j-1}) \quad \text{kaikille } j \geq 2.$$

Lisäksi $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, ja koska joukot B_j ovat erillisiä, saadaan Lebesguen mitan additiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned}
m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = m(B_1) + \sum_{j=2}^{\infty} m(B_j) \\
&= m(A_1) + \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{j=2}^{N} \big[m(A_j) - m(A_{j-1})\big]}_{=m(A_N)-m(A_1)} \\
&= m(A_1) + \lim_{N\to\infty} \big[m(A_N) - m(A_1)\big] = \lim_{N\to\infty} m(A_N),
\end{aligned}$$

ja väite seuraa.

(c) Koska $m(A_1) < \infty$ ja $A_j \subset A_1$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, myös $m(A_j) < \infty$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Merkitään $B_j = A_1 \backslash A_j$, kun $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $B_j \in \mathcal{M}_n$ (Lemma 3.5 (d)) ja (a)-kohdan nojalla

$$m(B_j) = m(A_1) - m(A_j) \quad \text{kaikille } j \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$, joten (b)-kohdan perusteella

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} m(B_j) = m(A_1) - \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Koska kaikki yllä olevat mitat ovat äärellisiä, saadaan järjestystä vaihtamalla

$$\lim_{j\to\infty} m(A_j) = m(A_1) - m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

De Morganin kaavan avulla nähdään, että

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_1 \setminus A_j)}_{=A_1 \cap (A_j)^c} = A_1 \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j)^c = A_1 \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Siten (a)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} m(A_j) &= m(A_1) - m\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= m(A_1) - m(A_1) + m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right),\end{aligned}$$

ja väite on todistettu. $\square$

Huomautus. Ilman oletusta $m(A) < \infty$ voidaan Lauseen 4.6 (a)-kohdassa päätyä määrittelemättömään tilanteeseen $\infty - \infty$. Vastaavasti (c)-kohdan väite ei välttämättä päde ilman oletusta $m(A_1) < \infty$; vastaesimerkin keksiminen on hyvä harjoitustehtävä. Huomaa kuitenkin, että itse asiassa riittäisi olettaa, että $m(A_N) < \infty$ jollekin $N \in \mathbb{N}$, koska joukkojen sisäkkäisyyden takia $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=N}^{\infty} A_j$ kaikille $N \in \mathbb{N}$.

Seuraava tulos liittyy Lebesguen mitan niin sanottuihin *säännöllisyysominaisuuksiin*.

Lause 4.7. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*

(a) *kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$A \subset U \quad \text{ja} \quad m(U) \le m^*(A) + \varepsilon.$$

(b) *on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja $m(B) = m^*(A)$.*

Todistus. (a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Lebesguen ulkomitan määritelmän nojalla on olemassa avoimet välit $I_i \in \mathcal{K}$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \le m^*(A) + \varepsilon.$$

Tässä käytettiin apuna myös välien mitallisuutta sekä tietoa $m^*(I_i) = v(I_i)$. Nyt voidaan valita $U = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$, joka on avoimien joukkojen yhdisteenä myös avoin. Mitan subadditiivisuuden nojalla tällöin

$$m(U) \leq \sum_{i=1}^\infty m(I_i) = \sum_{i=1}^\infty v(I_i) \leq m^*(A) + \varepsilon,$$

kuten haluttiin.

(b) Kun $j \in \mathbb{N}$, valitaan (a)-kohdan avulla avoin joukko U_j siten, että $A \subset U_j$ ja $m(U_j) \leq m^*(A) + \frac{1}{j}$. Määritellään $B = \bigcap_{j=1}^\infty U_j$, jolloin $B \in \mathcal{M}_n$ Lauseen 3.7 perusteella. Tällöin $A \subset B$, ja (ulko)mitan monotonisuuden nojalla kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$m^*(A) \leq m(B) \leq m(U_j) \leq m^*(A) + \tfrac{1}{j}.$$

Siispä täytyy olla $m^*(A) = m(B)$. □

Lauseessa 4.7 esiintyviä ideoita käyttäen voidaan joukon mitallisuudelle antaa useita yhtäpitäviä ehtoja.

Lause 4.8. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(a) $A \in \mathcal{M}_n$.

(b) *Kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$A \subset U \quad \textit{ja} \quad m^*(U \setminus A) \leq \varepsilon.$$

(c) *On olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja $m^*(B \setminus A) = 0$.*

(d) *Kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$E \subset A \quad \textit{ja} \quad m^*(A \setminus E) \leq \varepsilon.$$

(e) *On olemassa mitallinen joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $F \subset A$ ja $m^*(A \setminus F) = 0$.*

Todistus. (a) $\Longrightarrow$ (b): Olkoon siis $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan ensin, että $m(A) < \infty$. Lauseen 4.7 (a)-kohdan nojalla on olemassa avoin joukko U siten, että $A \subset U$ ja $m(U) \leq m(A) + \varepsilon$. Koska U ja A ovat mitallisia on myös $U \setminus A$ mitallinen (Lemma 3.5 (d)), ja koska $m(A) < \infty$, pätee tällöin Lauseen 4.6 (a)-kohdan perusteella

$$m^*(U \setminus A) = m(U \setminus A) = m(U) - m(A) \leq \varepsilon,$$

kuten haluttiin.

Jos $m(A) = \infty$, tutkitaan joukkoja $A_j = A \cap B(0, j) \in \mathcal{M}_n$, joille $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja $m(A_j) < \infty$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Todistuksen alun nojalla löytyy avoimet joukot U_j siten, että $A_j \subset U_j$ ja $m^*(U_j \setminus A_j) \leq 2^{-j}\varepsilon$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt voidaan valita $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$. Tällöin $A \subset U$ ja lisäksi $U \setminus A \subset \bigcup_{j=1}^\infty (U_j \setminus A_j)$, joten ulkomitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden perusteella

$$m^*(U \setminus A) \leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (U_j \setminus A_j)\right) \leq \sum_{j=1}^\infty m^*(U_j \setminus A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

(b) $\Longrightarrow$ (c): Tässä voidaan oletuksen nojalla valita kaikille $j \in \mathbb{N}$ avoin joukko U_j siten, että $A \subset U_j$ ja $m^*(U_j \setminus A) \leq \frac{1}{j}$. Olkoon $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Tällöin $B \in \mathcal{M}_n$ (Lause 3.7 (b)), $A \subset B$ ja kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee monotonisuuden nojalla, että

$$m^*(B \setminus A) \leq m^*(U_j \setminus A) \leq \tfrac{1}{j}.$$

Siispä $m^*(B \setminus A) = 0$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Koska $m^*(B \setminus A) = 0$, on joukko $B \setminus A$ mitallinen Lauseen 3.2 nojalla. Koska B on mitallinen, on tällöin myös joukko $A = B \setminus (B \setminus A)$ mitallinen Lemman 3.5 (d)-kohdan perusteella.

Implikaatiot (a) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a) jätetään harjotustehtäväksi. $\square$

***Huomautus 4.9.** Lauseen 4.7 (b)-kohdassa sekä Lauseen 4.8 (c)- ja (e)-kohdissa joukot B ja F voidaan valita Borel-joukoiksi. Tämä nähdään suoraan todistuksista, koska esimerkiksi joukot B ovat avoimien joukkojen leikkauksia, ja siten Borel-joukkoja. Koska kaikki Borel-joukot ovat mitallisia ja kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ on olemassa Borel-joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B$ ja $m(B) = m^*(A)$, niin sanotaan, että Lebesguen ulkomitta m^* on *Borel-säännöllinen*.

Ideana on määritellä integraali ensin funktioille, jotka saavat vain äärellisen monta eri arvoa. Tällaiset funktiot ovat niin sanottuja yksinkertaisia funktiota.

Muista, että joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ karakteristinen funktio on $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A, \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

5.1. Yksinkertaiset funktiot

Määritelmä 5.1. Funktio $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on **yksinkertainen**, jos on olemassa joukot $A_1, A_2, \ldots, A_M \in \mathcal{M}_n$ ja luvut $a_1, a_2, \ldots, a_M \in \mathbb{R}$ siten, että

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Kaikkien yksinkertaisten funktioiden joukko on

$$Y_n = \{u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid u \text{ on yksinkertainen}\}.$$

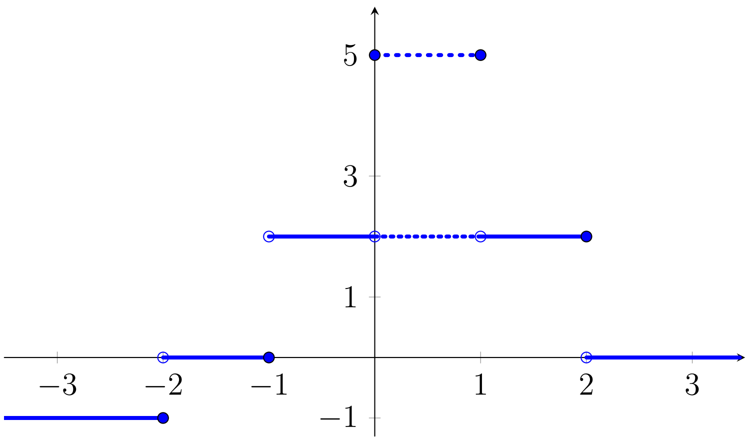
Lisäksi ei-negatiivisten yksinkertaisten funktioiden joukkoa merkitään

$$Y_n^+ = \{u\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[\mid u \text{ on yksinkertainen}\}.$$

Esimerkki 5.2. (a) Funktio $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = 3 \cdot \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) + 2 \cdot \chi_{]-1,2]}(x) - \chi_{]-\infty,-2]}(x),$$

on yksinkertainen. Alla on tämän funktion kuvaaja:



(b) Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $A \in \mathcal{M}_n$ jos ja vain jos $\chi_A \in Y_n$.

Määritelmän kaavassa (16) voi olla $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ tai $a_i = a_j$ joillekin $i \neq j$. Jokaisella yksinkertaisella funktiolla on kuitenkin myös seuraavan lemman mukainen yksikäsitteinen *normaaliesitys*, jossa joukot A_i ovat erillisiä ja luvut a_i ovat eri lukuja.

Lemma 5.3. *Funktio $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos ja vain jos on olemassa erilliset joukot $B_1, B_2, \dots, B_N \in \mathcal{M}_n$ ja luvut $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}$, joille pätee, että $\bigcup_{j=1}^N B_j = \mathbb{R}^n$, $b_{j_1} \neq b_{j_2}$ aina, kun $j_1 \neq j_2$, ja*

$$u(x) = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{B_j}(x) \quad \textit{kaikille } x \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Todistus. On selvää, että muotoa (17) oleva funktio on yksinkertainen, joten riittää osoittaa, että jokaisella yksinkertaisella funktiolla on tällainen esitys.

Olkoon siis $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^M a_i \chi_{A_i}(x),$$

yksinkertainen funktio. Funktio u saa vain äärellisen monta *eri* arvoa, jotka ovat lukujen a_j summia (tai 0). Olkoot nämä arvot $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}$. Tällöin joukot $B_j = f^{-1}(\{b_j\}) \subset \mathbb{R}^n$ ovat mitallisten joukkojen A_j sekä näiden komplementtien A_j^c yhdisteitä ja leikkauksia, jolloin myös $B_j \in \mathcal{M}_n$ kaikille $j = 1, 2, \dots, N$ (Lemma 3.5 ja Lause 3.7). Koska luvut b_j ovat eri lukuja, on selvästi $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ kun $j_1 \neq j_2$, ja koska $b_1, b_2, \dots, b_N$ ovat funktion u kaikki arvot, on $\bigcup_{j=1}^N B_j = \mathbb{R}^n$. Lisäksi

$$u(x) = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{B_j}(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n,$$

joten väite on todistettu. □

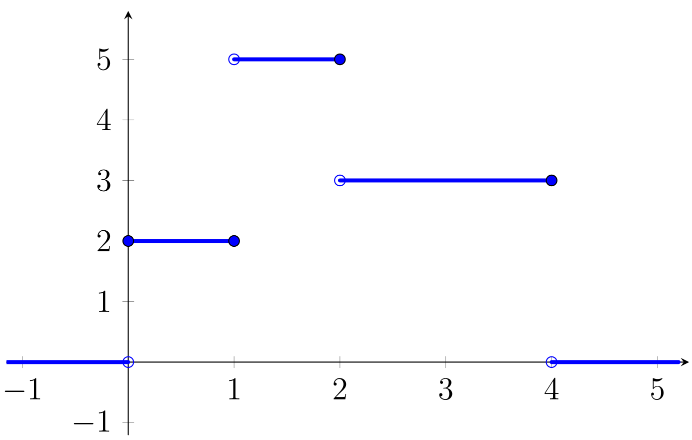
Esimerkki 5.4. Olkoon $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = 2 \cdot \chi_{[0,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{]1,4]}(x).$$

Tämän yksinkertaisen funktion normaaliesitys on

$$u(x) = 2 \cdot \chi_{[0,1]}(x) + 5 \cdot \chi_{]1,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{]2,4]}(x) \quad \Big(+ 0 \cdot \chi_{]-\infty,0[\cup]4,-\infty[}(x) \Big).$$

Yleensä mahdollinen ”nollatermi” jätetään kuitenkin kirjoittamatta yksinkertaisen funktion normaaliesityksessä.



5.2. **Yksinkertaisten funktioiden integraali**

Määritellään nyt Lebesgue-integraali ei-negatiivisille yksinkertaisille funktioille.

Määritelmä 5.5. Olkoon $u \in Y_n^+$ ja olkoon $u(x) = \sum_{j=1}^N b_j \chi_{B_j}(x)$ sen normaaliesitys. Tällöin funktion u **(Lebesgue-) integraali** yli mitallisen joukon $E \in \mathcal{M}_n$ on

$$I(u, E) = \sum_{j=1}^N b_j m(B_j \cap E).$$

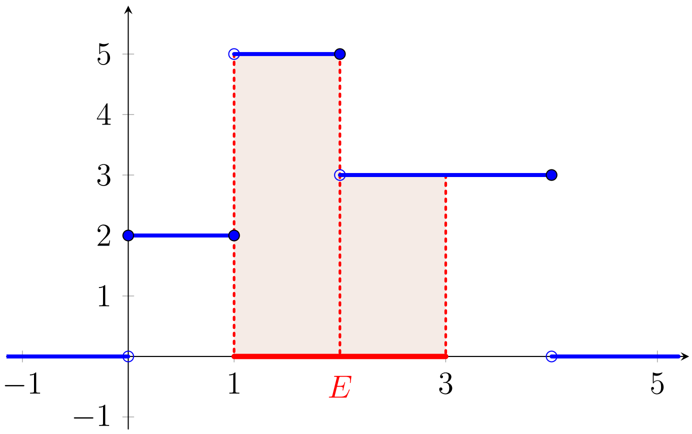
Selvästi $I(u, E) \geq 0$ aina, kun $u \in Y_n^+$ ja $E \in \mathcal{M}_n$. Huomaa, että voi myös olla $I(u, E) = \infty$. Integraalin määritelmässä käytetään normaaliesitystä, koska muuten pitäisi heti osoittaa, ettei integraali riipu yksinkertaisen funktion esitysmuodosta.

Esimerkki 5.6. (a) Olkoon $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = 2 \cdot \chi_{[0,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{]1,4]}(x),$$

ja olkoon $E = [1, 3]$. Tällöin Esimerkin 5.4 normaaliesityksen avulla nähdään, että

$$\begin{aligned} I(u, E) &= 2 \cdot m\big([0, 1] \cap [1, 3]\big) + 5 \cdot m\big(]1, 2] \cap [1, 3]\big) + 3 \cdot m\big(]2, 4] \cap [1, 3]\big) \\ &\quad + 0 \cdot m\big((]-\infty, 0[\cup]4, -\infty[) \cap [1, 3]\big) \\ &= 2 \cdot m(\{1\}) + 5 \cdot m(]1, 2]) + 3 \cdot m(]2, 3]) + 0 \cdot m(\emptyset) \\ &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 8. \end{aligned}$$



(b) Olkoon $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$. Tällöin funktion u normaaliesitys on

$$u(x) = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x) + 0 \cdot \chi_{([0,1] \cap \mathbb{Q})^c}(x),$$

joten

$$\begin{aligned} I(u, [0, 1]) &= 1 \cdot m\Big(\underbrace{([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cap [0, 1]}_{= [0,1] \cap \mathbb{Q}}\Big) + 0 \cdot m\Big(\underbrace{([0, 1] \cap \mathbb{Q})^c \cap [0, 1]}_{= [0,1] \setminus \mathbb{Q}}\Big) \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 = 0. \end{aligned}$$

Vertaa tätä Esimerkkiin 1.3 ja muista, että funktio u ei ole Riemann-integroituva.

Seuraava lemma helpottaa yksinkertaisten funktioiden integraalien tarkasteluja siinä mielessä, että yksinkertaisen funktion esityksessä olevien lukujen a_j ei tarvitse olla eri lukuja.

Lemma 5.7. *Oletetaan, että joukot $A_1, A_2, \ldots, A_M \in \mathcal{M}_n$ ovat erillisiä ja että $a_1, a_2, \ldots, a_M \geq 0$. Olkoon $u\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \chi_{A_i}(x) \quad \textit{kaikille } x \in \mathbb{R}^n,$$

ja olkoon $E \in \mathcal{M}_n$. Tällöin

$$I(u, E) = \sum_{i=1}^{M} a_i m(A_i \cap E).$$

Todistus. Kirjoitetaan

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_M\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_N\},$$

missä $b_{j_1} \neq b_{j_2}$, kun $j_1 \neq j_2$, ja määritellään

$$B_j = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = b_j\} \qquad \big(= f^{-1}(\{b_j\}) \big).$$

Tällöin $u(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{B_j}(x)$ on funktion u normaaliesitys (mahdollista nollatermiä lukuunottamatta), joten

$$I(u, E) = \sum_{j=1}^{N} b_j m(B_j \cap E).$$

Jos nyt $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_\ell} = b_j$, niin mitallisten joukkojen $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_\ell}$ erillisyyden ja mitan m additiivisuuden nojalla

$$m(B_j \cap E) = m(A_{i_1} \cap E) + m(A_{i_2} \cap E) + \ldots + m(A_{i_\ell} \cap E).$$

Tästä seuraa, että

$$I(u, E) = \sum_{j=1}^{N} b_j m(B_j \cap E) = \sum_{i=1}^{M} a_i m(A_i \cap E),$$

ja väite on todistettu. □

Yksinkertaisten funktioiden integraalilla on seuraavat perusominaisuudet.

Lause 5.8. *Oletetaan, että $u, v \in Y_n^+$ ja että $A, E \in \mathcal{M}_n$. Tällöin pätee:*

(a) $I(\chi_A, E) = m(A \cap E)$.

(b) $I(\lambda u, E) = \lambda I(u, E)$ *kaikille* $\lambda \geq 0$.

(c) $I(u + v, E) = I(u, E) + I(v, E)$. *(Huomaa, että myös $u + v \in Y_n^+$.)*

(d) *Jos $u(x) \leq v(x)$ kaikille $x \in E$, niin $I(u, E) \leq I(v, E)$.*

(e) *Jos $E \subset A$, niin $I(u, E) \leq I(u, A)$.*

Todistus. (a) ja (b) seuraavat helposti suoraan määritelmästä.

(c) Olkoot $u = \sum_{i=1}^{M} a_i \chi_{A_i}$ ja $v = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{B_j}$ näiden funktioiden normaaliesitykset. Tällöin joukot $C_{i,j} = A_i \cap B_j$ ovat erillisiä eli $C_{i_1,j_1} \cap C_{i_2,j_2} = \emptyset$, kun $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, sekä

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_{C_{i,j}}(x) = \chi_{A_i}(x) \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{M} \chi_{C_{i,j}}(x) = \chi_{B_j}(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n.$$

Siten kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{aligned} u(x) + v(x) &= \sum_{i=1}^{M} a_i \sum_{j=1}^{N} \chi_{C_{i,j}}(x) + \sum_{j=1}^{N} b_j \sum_{i=1}^{M} \chi_{C_{i,j}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (a_i + b_j) \chi_{C_{i,j}}(x). \end{aligned}$$

Tässä yksinkertainen funktio $u + v$ on siis esitetty muodossa, jossa joukot $C_{i,j}$ ovat erillisiä. (Huomaa kuitenkin, että luvut $a_i + b_j$ eivät välttämättä ole keskenään eri lukuja, jolloin kyseessä ei ole normaaliesitys.) Näin ollen Lemman 5.7 sekä mitan additiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} I(u + v, E) &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (a_i + b_j) m(C_{i,j} \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^{M} a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m(C_{i,j} \cap E)}_{=m(A_i \cap E)} + \sum_{j=1}^{N} b_j \underbrace{\sum_{i=1}^{M} m(C_{i,j} \cap E)}_{=m(B_j \cap E)} \\ &= I(u, E) + I(v, E), \end{aligned}$$

kuten haluttiinkin.

(d) Harjoitustehtävä (tässä voi käyttää määritelmää tai kirjoittaa $v = u + (v - u)$, jolloin väite seuraa (c)-kohdan avulla).

(e) Harjoitustehtävä (tässä voi esimerkiksi käyttää edellistä kohtaa funktioihin $u\chi_A$ ja $u\chi_E$). □

Seuraavat yksinkertaisten funktioiden integraalin ominaisuudet saadaan suoraviivaisesti mitan m vastaavista ominaisuuksista eli (sub)additiivisuudesta sekä Lauseessa 4.6 esiintyvistä rajankäyntituloksista. Oleellisesti kyse on siitä, että $I(u, \cdot)$ on "äärellinen painotettu summa joukkojen mitoista".

Lause 5.9. *Oletetaan, että* $u \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *on yksinkertainen funktio ja että* $E_k \in \mathcal{M}_n$ *kaikille* $k \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

(a) $I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(u, E_k)$.

(b) $I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} I(u, E_k)$, *jos joukot* E_k *ovat lisäksi erillisiä.*

(c) *Jos* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, *niin*

$$I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} I(u, E_k).$$

(d) *Jos* $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ *ja lisäksi* $I(u, E_1) < \infty$, *niin*

$$I\Big(u, \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} I(u, E_k).$$

Todistus. (a) Olkoon funktion u normaaliesitys $u(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}(x)$. Mitan subadditiivisuuden nojalla kaikille $i = 1, 2, \dots, N$ pätee

$$m\Big(A_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap E_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap E_k).$$

Koska $a_i \ge 0$ kaikille $i = 1, 2, \dots, N$, saadaan yksinkertaisten funktioiden integraalin määritelmän sekä edellisen arvion perusteella

$$\begin{aligned} I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \sum_{i=1}^{N} a_i m\Big(A_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i m(A_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I(u, E_k), \end{aligned} \tag{18}$$

missä summien järjestyksen saa vaihtaa Lauseen 1.6 perusteella. Tämä todistaa kohdan (a) väitteen.

(b) Tämä seuraa mitan m additiivisuudesta, sillä jos joukot E_k ovat erillisiä, niin myös joukot $A_i \cap E_k$ ovat erillisiä kaikilla $i = 1, \dots, N$, $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen edellä kohdassa (18) pätee yhtäsuuruus eli

$$I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{k=1}^{\infty} m(A_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I(u, E_k),$$

kuten haluttiin.

Kohtien (c) ja (d) perustelut jätetään harjoitustehtäviksi. $\square$

Haluamme luonnollisesti määritellä integraalin paljon suuremmalle funktioluokalle kuin vain yksinkertaisille funktioille. Tätä varten siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan niin sanottuja *mitallisia funktioita*.

6.1. Määritelmä ja perusominaisuuksia

Johdannon Kappaleessa 1.2.4 nähtiin, että funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesguen integraali liittyy läheisesti joukkojen E_i mittoihin, missä

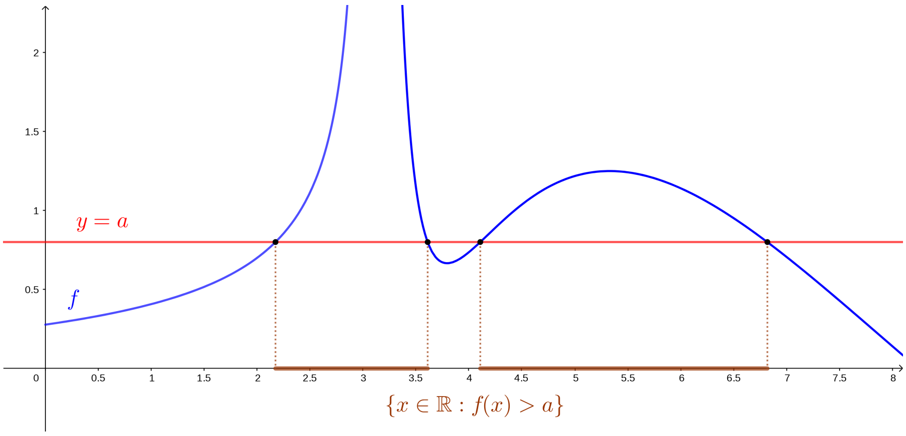
$$E_i = \{x \in [a,b] : y_{i-1} < f(x) \le y_i\} = f^{-1}\big(]y_{i-1}, y_i]\big)$$

joillekin $y_{i-1} < y_i$. Jotta integraalin määritelmä olisi toimiva, on näiden joukkojen syytä olla mitallisia. Tämä johtaa seuraavaan mitallisten funktioiden määritelmään, jossa tosin riittää yksinkertaisuuden vuoksi tarkastella vain yhden epäyhtälön avulla saatavia joukkoja.

Määritelmä 6.1. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$. Funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on **(Lebesgue-) mitallinen**, jos joukko

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

on mitallinen kaikille $a \in \mathbb{R}$.



Huomautus. (a) Mitallisen funktion määritelmässä esiintyvä joukko

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}\big(]a, \infty]\big)$$

on siis välin $]a, \infty]$ alkukuva funktiolle f.

(b) Oletus $A \in \mathcal{M}_n$ on osa mitallisen funktion $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ määritelmää. Kun jatkossa oletamme, että funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen, täytyy tällöin siis erityisesti olla $A \in \mathcal{M}_n$.

Esimerkki 6.2. (a) Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Vakiofunktio $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ kaikille $x \in A$, on mitallinen, sillä

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{M}_n, & \text{jos } a \ge c, \\ A \in \mathcal{M}_n, & \text{jos } a < c. \end{cases}$$

(b) Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$B \in \mathcal{M}_n \iff \chi_B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \text{ on mitallinen.}$$

Tämä seuraa helposti siitä, että

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_B(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{M}_n, & \text{jos } a \geq 1, \\ B, & \text{jos } 0 \leq a < 1, \\ \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

(c) Kaikki yksinkertaiset funktiot ovat mitallisia (harjoitustehtävä).

(d) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva*, niin f on mitallinen. Tämä perustuu siihen, että jatkuvalle funktiolle f joukko $\{x \in A : f(x) > a\}$ on avoin — ja siten mitallinen — kaikille $a \in \mathbb{R}$; tarkemmat perustelut jätetään harjoitustehtäviin.

Funktion mitallisuus voitaisiin määritellä myös seuraavien ehtojen avulla.

Lause 6.3. *Olkoot $A \in \mathcal{M}_n$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) *f on mitallinen (eli $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}_n$ kaikille $a \in \mathbb{R}$)*

(b) *$\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}_n$ kaikille $a \in \mathbb{R}$*

(c) *$\{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{M}_n$ kaikille $a \in \mathbb{R}$*

(d) *$\{x \in A : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}_n$ kaikille $a \in \mathbb{R}$.*

Todistus. (a) $\Longrightarrow$ (b): Kirjoitetaan

$$\{x \in A : f(x) \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in A : f(x) > a - \tfrac{1}{k}\}}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (oletus)}},$$

jolloin myös $\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}_n$ Lauseen 3.7 (b)-kohdan nojalla.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Nyt

$$\{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geq a\} \ \in \mathcal{M}_n$$

oletuksen ja Lemman 3.5 (d)-kohdan perusteella.

Loput implikaatiot (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (a) todistetaan aivan vastaavaan tapaan. $\square$

Lause 6.4. *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio.*

(a) *Jos $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_n$ ja $f^{-1}\big(]a,b[\big) \in \mathcal{M}_n$ aina, kun $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, niin f on mitallinen.*

(b) *Jos f on mitallinen, niin $f^{-1}(\{-\infty\}), f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}_n$ ja $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_n$ aina, kun $B \subset \mathbb{R}$ on avoin (tai suljettu) joukko.*

Todistus. (a) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\{x \in A : f(x) < a\} = \underbrace{f^{-1}(\{-\infty\})}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (oletus)}} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}\big(]a-k, a[\big)}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (oletus)}},$$

joten $\{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{M}_n$ Lauseen 3.7 (a)-kohdan nojalla. Siispä f on mitallinen Lauseen 6.3 (c)-kohdan perusteella.

(b) Oletetaan siis, että f on mitallinen. Koska

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}\big([-\infty,-k]\big)}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (Lause 6.3(d))}},$$

niin $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_n$ Lauseen 3.7 (b)-kohdan perusteella. Vastaavaan tapaan osoitetaan, että myös $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}_n$.

Olkoot sitten $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tällöin

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(]a,b[\big) &= \{x \in A : a < f(x) < b\} \\ &= \underbrace{\{x \in A : f(x) > a\}}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (määritelmä)}} \cap \underbrace{\{x \in A : f(x) < b\}}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (Lause 6.3(c))}}, \end{aligned}$$

joten myös $f^{-1}\big(]a,b[\big) \in \mathcal{M}_n$ Lemman 3.5 (c)-kohdan perusteella. Siispä jokaisen avoimen välin alkukuva on mitallinen.

Jos $B \subset \mathbb{R}$ on avoin joukko, voidaan se esittää avoimien välien yhdisteenä, toisin sanoen $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, missä $I_i \subset \mathbb{R}$ on avoin väli kaikille $i \in \mathbb{N}$. Edellä osoitettiin, että $f^{-1}(I_i) \in \mathcal{M}_n$ kaikille $i \in \mathbb{N}$, jolloin Lauseen 3.7 (a)-kohdan nojalla myös

$$f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i) \;\in \mathcal{M}_n.$$

Jos taas $B \subset \mathbb{R}$ on suljettu joukko, on B^c avoin, jolloin edellä todistetun nojalla $f^{-1}(B^c) \in \mathcal{M}_n$. Helposti nähdään, että

$$f^{-1}(B) = A \setminus f^{-1}(B^c),$$

ja näin ollen myös $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_n$ Lemman 3.5 perusteella. □

Huomautus 6.5. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Jos $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ on mikä tahansa väli, niin $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}_n$. Rajoittamattomille väleille tämä seuraa suoraan Lauseesta 6.3. Rajoitettujen välien tapaus perustellaan puolestaan vastaavasti kuin edellisen lauseen kohdan (b) todistuksessa, jossa on käsitelty avoimien välien tapaus.

Huomautus. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin

(i) f on jatkuva $\iff$ $f^{-1}(B)$ on *avoin* aina, kun $B \subset \mathbb{R}$ on *avoin*;

(ii) f on mitallinen $\iff$ $f^{-1}(B)$ on *mitallinen* aina, kun $B \subset \mathbb{R}$ on *avoin*.

Jälkimmäinen yhtäpitävyys **ei päde**, jos oikea puoli muutetaan muotoon

"$f^{-1}(B)$ on *mitallinen* aina, kun $B \subset \mathbb{R}$ on *mitallinen*";

katso esimerkiksi [Tao, Remark 1.3.10].

***Huomautus 6.6.** Lauseen 6.4 (b)-kohta pätee yleisemmin kaikille Borel-joukoille. Toisin sanoen, jos $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja $B \subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko, niin $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_n$. Tämä seuraa siitä, että kokoelma

$$\Gamma = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_n\}$$

on σ-algebra, joka sisältää Lauseen 6.4 (b)-kohdan nojalla kaikki avoimet joukot $U \subset \mathbb{R}$. Koska Borel-joukkojen kokoelma $\mathcal{B}_1$ on *pienin* avoimet joukot sisältävä σ-algebra, täytyy siis olla $\mathcal{B}_1 \subset \Gamma$.

Määritelmä 6.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio. Tällöin

(a) funktion f **nollajatko** on funktio $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in A, \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

(b) funktion f **positiiviosa** on funktio $f^+\colon A \to [0,\infty]$,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{jos } f(x) < 0. \end{cases}$$

(c) funktion f **negatiiviosa** on funktio $f^-\colon A \to [0,\infty]$,

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{jos } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{jos } f(x) > 0. \end{cases}$$

On helppo nähdä, että tällöin

$$f^+, f^- \geq 0, \quad f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Huomaa, että funktiot f^+ ja f^- eivät voi saada yhtä aikaa arvoa ∞, joten erotus $f^+(x) - f^-(x)$ on hyvin määritelty kaikille $x \in A$.

Lemma 6.8. *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio. Tällöin*

(a) *f on mitallinen jos ja vain jos nollajatko $\tilde{f}$ on mitallinen.*

(b) *f on mitallinen jos ja vain jos f^+ ja f^- ovat mitallisia.*

Todistus. (a) Harjoitustehtävä.

(b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Oletetaan ensin, että f on mitallinen. Koska

$$\{x \in A : f^+(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in A : f(x) > a\}, & \text{jos } a \geq 0, \\ A, & \text{jos } a < 0, \end{cases}$$

on tämä joukko aina mitallinen, ja siten f^+ on mitallinen. Aivan vastaavalla tavalla nähdään, että myös f^- on mitallinen.

Toisaalta jos f^+ ja f^- ovat mitallisia, on f mitallinen, sillä

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in A : f^+(x) > a\}, & \text{jos } a \geq 0, \\ \{x \in A : f^-(x) < -a\}, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

□

Lemma 6.9. *Oletetaan, että $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia. Tällöin joukko*

$$E = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$$

on mitallinen.

Todistus. Huomataan, että $x \in E$ jos ja vain jos on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ siten, että $f(x) < q < g(x)$. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big[\underbrace{\{x \in A : f(x) < q\}}_{\in \mathcal{M}_n \ (f \text{ mitallinen})} \cap \underbrace{\{x \in A : q < g(x)\}}_{\in \mathcal{M}_n \ (g \text{ mitallinen})} \Big],$$

jolloin Lemman 3.5 ja Lauseen 3.7 perusteella myös $E \in \mathcal{M}_n$. (Muista, että yhdiste $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}}$ on numeroituva.) ☐

Lause 6.10. *Oletetaan, että $f, g \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia ja että $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin mitallisia ovat myös funktiot*

(a) $\lambda f \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$,

(b) $f + g \colon \widetilde{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, *missä $\widetilde{A} \subset A$ on summan $f + g$ määrittelyjoukko,*

(c) $fg \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$,

(d) $|f| \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Todistus. (a) Harjoitustehtävä.

(b) Koska summia $\infty + (-\infty)$ ja $-\infty + \infty$ ei hyväksytä, on summa $f + g$ määritelty joukossa

$$\widetilde{A} = A \setminus \Big[\big(f^{-1}(\{\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\})\big) \cup \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{\infty\})\big) \Big].$$

Tämä joukko on mitallinen Lauseen 6.4 ja Lemman 3.5 nojalla.

Kaikille $a \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$\{x \in \widetilde{A} : (f + g)(x) < a\} = \{x \in \widetilde{A} : f(x) < a - g(x)\}.$$

On helppo osoittaa (mieti!), että funktio $x \mapsto a - g(x)$ on mitallinen, ja siten joukko $\{x \in \widetilde{A} : f(x) < a - g(x)\}$ on mitallinen Lemman 6.9 perusteella. Tämä osoittaa, että summa $f + g$ on mitallinen joukossa $\widetilde{A}$.

(c) Olkoon $\widetilde{A} = \{x \in A : f(x) \neq \pm\infty \text{ ja } g(x) \neq \pm\infty\}$. Kaikille $x \in \widetilde{A}$ pätee, että

$$(fg)(x) = \tfrac{1}{4}\big[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\big]$$

ja funktiot $(f + g)^2$ ja $(f - g)^2$ ovat mitallisia joukossa $\widetilde{A}$ (harjoitustehtävä; tämä voidaan perustella myös seuraavan Lauseen 6.11 avulla). Siispä summan ja vakiolla kertomisen mitallisuuksien nojalla myös tulo fg on mitallinen joukossa $\widetilde{A}$. Toisaalta joukossa $A \setminus \widetilde{A}$ ainakin toinen funktioista saa arvon $\pm\infty$. Eri tapauksia tarkastelemalla nähdään, että fg on mitallinen myös tässä joukossa, mistä seuraa funktion fg mitallisuus koko joukossa A.

(d) Koska $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ ja tämä summa on hyvin määritelty kaikille $x \in A$, seuraa funktion $|f|$ mitallisuus Lemman 6.8 (b)-kohdasta sekä mitallisten funktioiden summan mitallisuudesta. ☐

Lause 6.11. *Oletetaan, että $f \colon A \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja että $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f \colon A \to \mathbb{R}$ on mitallinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. ☐

Erityisesti jos $f\colon A \to [0,\infty[$ on mitallinen ja $p > 0$, on funktio $f^p\colon A \to [0,\infty[$, $f^p(x) = f(x)^p$, mitallinen.

6.2. **Mitalliset funktiot ja raja-arvot**

Kun $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on jono funktioita, määritellään sup- ja inf-funktiot asettamalla

$$\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\Big)(x) = \sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$$

ja

$$\Big(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\Big)(x) = \inf\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$$

kaikille $x \in A$.

Lause 6.12. *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$ ja että funktiot $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin myös funktiot $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ja $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ ovat mitallisia.*

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\Big\{x \in A : \Big(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\Big)(x) \le a\Big\} &= \{x \in A : f_k(x) \le a \ \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}\}\\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in A : f_k(x) \le a\}}_{\in \mathcal{M}_n},\end{aligned}$$

joten tämä joukko on mitallinen Lauseen 3.7 nojalla. Siten funktion $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ mitallisuus seuraa Lauseesta 6.3.

Funktion $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ mitallisuus voidaan osoittaa vastaavasti tai käyttäen tietoa, että

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k).$$

$\square$

Lause 6.13. *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$, että funktiot $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja että on olemassa raja-arvofunktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikille $x \in A$. Tällöin myös funktio f on mitallinen.*

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned}f(x) \le a &\iff \forall i \in \mathbb{N} \ \lim_{k\to\infty} f_k(x) < a + \tfrac{1}{i}\\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ siten, että } f_k(x) < a + \tfrac{1}{i} \ \forall k \ge N.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\{x \in A : f(x) \le a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty} \underbrace{\{x \in A : f_k(x) < a + \tfrac{1}{i}\}}_{\in \mathcal{M}_n \text{ (oletus)}},$$

joten myös joukko $\{x \in A : f(x) \le a\}$ on mitallinen Lauseen 3.7 nojalla. $\square$

Edellisen tuloksen avulla voidaan osoittaa esimerkiksi derivaattojen mitallisuus.

Esimerkki 6.14. Jos funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, niin derivaattafunktio $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen; muista, että derivaatta ei ole välttämättä jatkuva.

Ideana on tutkia funktiojonoa $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_k(x) = \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nämä funktiot ovat mitallisia (harjoitustehtävä) ja

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f'(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R},$$

joten funktion f' mitallisuus seuraa Lauseesta 6.13.

Seuraava approksimaatiotulos on erittäin hyödyllinen Lebesgue-integraalin teorian kannalta.

Lause 6.15. *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$ ja että $f\colon A \to [0,\infty]$ on funktio. Tällöin f on mitallinen jos ja vain jos on olemassa yksinkertaiset funktiot $u_k \in Y_n^+$ siten, että*

$$0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_k \le u_{k+1} \le \ldots \quad \textit{kaikille } k \in \mathbb{N}$$

ja $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ kaikille $x \in A$.

Todistus. "$\Leftarrow$" Jos $f(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ kaikille $x \in A$, missä funktiot u_k ovat yksinkertaisia ja siten erityisesti mitallisia, on f mitallinen Lauseen 6.13 perusteella.

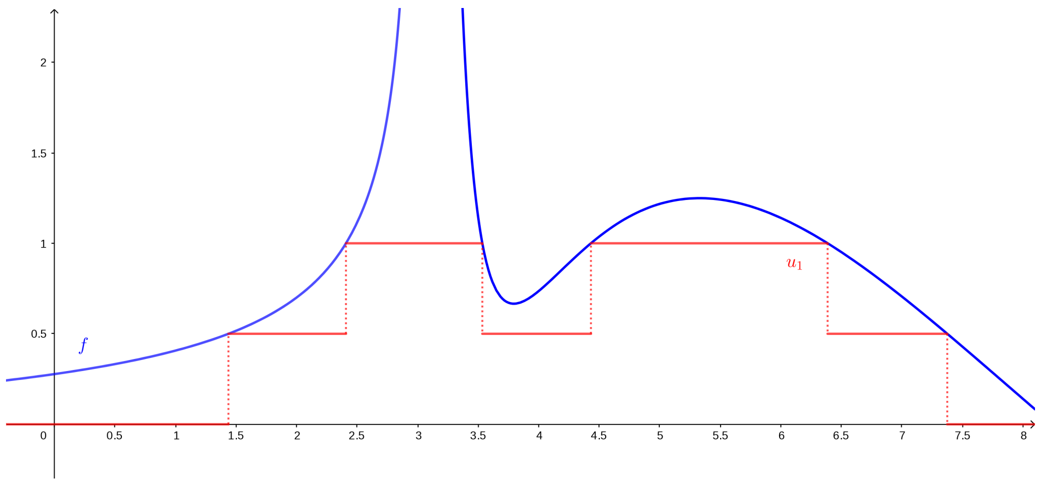
"$\Rightarrow$" Oletaan sitten, että f on mitallinen. Kun $k \in \mathbb{N}$ ja $j = 1, 2, \ldots, k2^k$, merkitään

$$B_{k,j} = \{x \in A : (j-1)2^{-k} \le f(x) < j2^{-k}\}$$

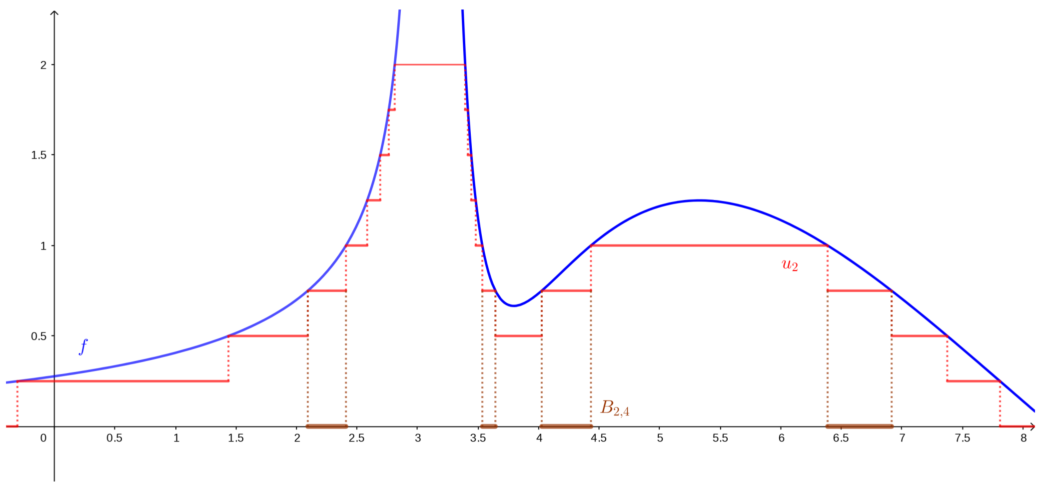
ja

$$\widetilde{B}_k = \{x \in A : f(x) \ge k\}.$$

Funktion f mitallisuudesta seuraa, että joukot $B_{k,j}$ ja $\widetilde{B}_k$ ovat mitallisia (Huomautus 6.5).



Funktio f ja yksinkertainen funktio $u_1 \le f$



Funktio f ja yksinkertainen funktio $u_2 \leq f$ (huomaa, että $u_1 \leq u_2$)

Määritellään funktiot $u_k \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ asettamalla

$$u_k(x) = \begin{cases} (j-1)2^{-k}, & \text{jos } x \in B_{k,j},\ j = 1,2,\dots,k2^k, \\ k, & \text{jos } x \in \widetilde{B}_k, \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Toisin sanoen

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{k2^k} (j-1)2^{-k}\chi_{B_{k,j}}(x) + k\chi_{\widetilde{B}_k}(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n.$$

Selvästi kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee, että $u_k \in Y_n^+$.

Funktioiden u_k määritelmästä seuraa, että $u_k(x) \leq u_{k+1}(x) \leq f(x)$ kaikille $x \in A$ ja kaikillle $k \in \mathbb{N}$ (harjoitustehtävä). Lisäksi

$$|f(x) - u_k(x)| = f(x) - u_k(x) \leq 2^{-k}, \qquad \text{kun } f(x) < k.$$

Jos $f(x) < \infty$, pätee tämä siis kaikille riittävän suurille k, mistä seuraa, että $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ aina, kun $x \in A$ ja $f(x) < \infty$. Jos taas $x \in A$ ja $f(x) = \infty$, on $u_k = k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, joten tällöinkin $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = \infty = f(x)$, ja väite on todistettu. □

Huomautus. Lauseen 6.15 approksimaatiossa on pohjimmiltaan kyse täsmälleen samasta asiasta, kuin Kappaleessa 1.2.4 kuvatussa Lebesguen alkuperäisessä ideassa integraalia koskien: Jaetaan y-suunta osiin ja tutkitaan näiden välien alkukuvia funktiolle f. Lauseen 6.15 tapauksessa y-akselin väli $[0,k]$ jaetaan $k2^k$ kappaleeseen yhtä suuria osia, joiden pituus on 2^{-k}. Yksinkertaiset funktiot u_k arvioivat funktiota f alhaalta päin yhä tarkemmin ja tarkemmin, ja *ilmeisesti* näiden funktioiden integraalit $I(u_k, A)$ antavat tällöin hyviä arvioita funktion f integraalille yli joukon A; tämä idea täsmennetään seuraavassa luvussa.

Seuraus 6.16. *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$ ja että $f \colon A \to \mathbb{R}$ on funktio. Tällöin f on mitallinen jos ja vain jos on olemassa yksinkertaiset funktiot $u_k \in Y_n$ siten, että $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ kaikille $x \in A$.*

Todistus. Jos $f = f^+ - f^-$ on mitallinen, ovat myös $f^+, f^- \geq 0$ mitallisia (Lemma 6.8(b)), ja tällöin Lauseen 6.15 perusteella on olemassa yksinkertaiset funktiot $u_k^{(1)}, u_k^{(2)} \in Y_n^+$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} u_k^{(1)}(x) = f^+(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} u_k^{(2)}(x) = f^-(x)$$

kaikille $x \in A$. Tällöin voidaan määritellä $u_k = u_k^{(1)} - u_k^{(2)} \in Y_n$, ja väite seuraa.

Käänteinen suunta seuraa suoraan Lauseesta 6.13, koska yksinkertaiset funktiot ovat erityisesti mitallisia. □

Lukujonolla $(a_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$ ei välttämättä ole raja-arvoa joukossa $\overline{\mathbb{R}}$, mutta sillä on aina niin sanotut ala- ja yläraja-arvot, jotka määritellään seuraavassa huomatuksessa. Tarvitsemme jatkossa näitä käsitteitä apuna kahden tärkeän tuloksen muotoilussa ja todistuksessa (Fatoun lemma 7.16 ja Dominoidun konvergenssin lause 8.9), mutta muuten ne eivät kuulu kurssin keskeisimpään sisältöön.

***Huomautus 6.17** (Ala- ja yläraja-arvot)**.** Olkoon $a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Tällöin lukujonon (a_k) **ala- ja yläraja-arvot** määritellään asettamalla

$$\liminf_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} a_j = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_j : j \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

ja

$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} a_j = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_j : j \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Näille on voimassa esimerkiksi seuraavaa:

- $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ ja $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ ovat olemassa kaikille jonoille $(a_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$. Tämä seuraa siitä, että kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee
  $$\{a_j : j \geq k\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \supset \{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \{a_j : j \geq k+1\}.$$
  Näin ollen jono $b_k = \inf\limits_{j\geq k} a_j$ on kasvava ja jono $c_k = \sup\limits_{j\geq k} a_j$ on vähenevä, jolloin niillä on olemassa raja-arvot joukossa $\overline{\mathbb{R}}$; nämä ovat juuri $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k$ ja $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$.

- On selvää, että aina $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k \leq \limsup\limits_{k\to\infty} a_k$.

- Jono $(a_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$ suppenee $\iff$ $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k = \limsup\limits_{k\to\infty} a_k$, ja tällöin
  $$\lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k = \limsup_{k\to\infty} a_k.$$

- Esimerkiksi jos $a_k = (-1)^k$, niin jono (a_k) ei suppene, mutta
  $$\liminf_{k\to\infty} a_k = -1 \qquad \text{ja} \qquad \limsup_{k\to\infty} a_k = 1.$$

- Jos $a_k \leq b_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k \leq \liminf\limits_{k\to\infty} b_k$ ja $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k \leq \limsup\limits_{k\to\infty} b_k$.

- $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$ jos ja vain jos kaikille $\varepsilon > 0$

  (1°) on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $a_k > a - \varepsilon$ aina, kun $k \geq N$, ja

  (2°) kaikille $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $j \geq k$ siten, että $a_j < a + \varepsilon$.

Vastaavasti $\limsup_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$ jos ja vain jos kaikille $\varepsilon > 0$

(1°) on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $a_k < a + \varepsilon$ aina, kun $k \geq N$, ja

(2°) kaikille $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $j \geq k$ siten, että $a_j > a - \varepsilon$.

- Jos $f_k \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen kaikille $k \in \mathbb{N}$, ovat myös funktiot $\liminf_{k\to\infty} f_k$ ja $\limsup_{k\to\infty} f_k$ mitallisia. Tämä seuraa siitä, että funktiot $\inf_{j\geq k} f_j$ ja $\sup_{j\geq k} f_j$ ovat mitallisia, mikä nähdään kuten Lauseessa 6.12, jolloin myös näiden raja-arvofunktiot ovat mitallisia Lauseen 6.13 perusteella.
- Ala- ja yläraja-arvoille käytetään myös merkintöjä

$$\varliminf_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k \qquad \text{ja} \qquad \varlimsup_{k\to\infty} a_k = \limsup_{k\to\infty} a_k.$$

7. Ei-negatiivisten funktioiden integraalit

7.1. Määritelmä ja perusominaisuuksia

Ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle f voidaan nyt määritellä Lebesguen integraali approksimoimalla funktiota f alhaalta päin yksinkertaisilla funktioilla.

Määritelmä 7.1. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen funktio. Funktion f **Lebesguen integraali** yli joukon A on

$$\int_A f\,dm = \sup\big\{I(u,A) : u \in Y_n^+,\ u(x) \le f(x) \text{ kaikille } x \in A\big\}.$$

Huomaa, että integraali $\int_A f\,dm \in [0,\infty]$ on olemassa kaikille ei-negatiivisille mitallisille funktioille $f\colon A \to [0,\infty]$. Lebesguen integraalille käytetään myös merkintöjä

$$\int_A f\,dm = \int_A f(x)\,dm(x) = \int_A f(x)\,dx;$$

jälkimmäisen kanssa pitää joskus olla tarkkana, koska se voi tarkoittaa yhtä hyvin myös Riemann-integraalia.

Seuraavien pienten integraalia koskevien huomioiden perustelut ovat hyviä harjoitustehtäviä.

Huomautus. (a) Oletetaan, että $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Koska myös nollajatko $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on mitallinen ja

$$\int_B \tilde{f}\,dm = \int_{A\cap B} f\,dm \qquad \text{kaikille } B \in \mathcal{M}_n,$$

voidaan jatkossa tarvittaessa aina olettaa, että f on määritelty kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja että $f(x) = 0$ kun $x \notin A$.

(b) Jos $u \in Y_n^+$ ja $A \in \mathcal{M}_n$, niin $\int_A u\,dm = I(u,A)$.

(c) Jos $m(A) = 0$, niin $\int_A f\,dm = 0$ kaikille $f\colon A \to [0,\infty]$.

Lebesguen integraalilla on tuttuja perusominaisuuksia, jotka seuraavat vastaavista yksinkertaisten funktioiden integraalin ominaisuuksista.

Lause 7.2. *Oletetaan, että $f, g\colon A \to [0,\infty]$ ovat mitallisia funktioita. Tällöin*

(a) $\displaystyle\int_A (\lambda f)\,dm = \lambda \int_A f\,dm$ *kaikille* $\lambda \in [0,\infty[$.

(b) *Jos* $f(x) \le g(x)$ *kaikille* $x \in A$, *niin* $\displaystyle\int_A f\,dm \le \int_A g\,dm$.

(c) *Jos* $E \in \mathcal{M}_n$ *ja* $E \subset A$, *niin* $\displaystyle\int_E f\,dm \le \int_A f\,dm$.

Todistus. (a) Jos $\lambda = 0$ on väite selvä, joten voidaan olettaa, että $0 < \lambda < \infty$. Olkoon $u \in Y_n^+$ yksinkertainen funktio siten, että $u(x) \le f(x)$ kaikilla $x \in A$.

Tällöin myös $\lambda u \in Y_n^+$ ja $\lambda u(x) \leq \lambda f(x)$ kaikilla $x \in A$, joten Lauseen 5.8 (b)-kohdan ja integraalin määritelmän nojalla

$$\lambda I(u, A) = I(\lambda u, A) \leq \int_A (\lambda f)\, dm.$$

Kun vasemmalla puolella otetaan supremum yli kaikkien tällaisten $u \in Y_n^+$, saadaan integraalin määritelmän mukaan, että

$$\lambda \int_A f\, dm \leq \int_A (\lambda f)\, dm. \tag{19}$$

Nyt arviota (19) voidaan soveltaa myös lukuun $\frac{1}{\lambda}$, jolloin saadaan, että toisaalta

$$\int_A (\lambda f)\, dm = \lambda \cdot \tfrac{1}{\lambda} \int_A (\lambda f)\, dm \leq \lambda \int_A (\tfrac{1}{\lambda}\lambda f)\, dm = \lambda \int_A f\, dm,$$

ja väite seuraa kun edelliset arviot yhdistetään.

(b) ja (c) ovat harjoitustehtäviä. □

Huomautus. Edellisen lauseen yhteydessä voisi tuntua luonnolliselta todistaa myös integraalin summakaava

$$\int_A (f+g)\, dm = \int_A f\, dm + \int_A g\, dm.$$

Tämän perustelu on kuitenkin vähän hankalaa tällä hetkellä käytössä olevien tietojen avulla, joten tähän palataan myöhemmin.

Seuraava integraaleja koskeva epäyhtälö on nimetty Pafnuti Tšebyšovin (Chebyshev) mukaan. Tätä nimeä voidaan käyttää muistakin samankaltaisista epäyhtälöistä.

Lause 7.3 (Tšebyšovin epäyhtälö)**.** *Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin kaikille $0 < \lambda < \infty$ pätee, että*

$$m(\{x \in A : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f\, dm.$$

Todistus. Kun $0 < \lambda < \infty$, merkitään $A_\lambda = \{x \in A : f(x) > \lambda\}$, jolloin $A_\lambda \in \mathcal{M}_n$ koska f on mitallinen. Koska $A_\lambda \subset A$ ja $f(x) \geq \lambda$ kaikilla $x \in A_\lambda$, saadaan Lauseen 7.2 (c)-, (b)- ja (a)-kohtien avulla, että

$$\int_A f\, dm \overset{(c)}{\geq} \int_{A_\lambda} f\, dm \overset{(b)}{\geq} \int_{A_\lambda} \lambda\, dm \overset{(a)}{=} \lambda \int_{A_\lambda} 1\, dm = \lambda m(A_\lambda).$$

Väite seuraa, kun jaetaan puolittain luvulla $\lambda > 0$. □

7.2. Monotoninen konvergenssi

Eräs Lebesguen integraalin suurista eduista Riemannin integraalin nähden on sen parempi yhteensopivuus funktiojonojen raja-arvojen kanssa. Peruskysymys tässä yhteydessä on seuraava: Oletetaan, että funktiot $f_k\colon A \to [0,\infty]$ ovat mitallisia kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja että on olemassa raja-arvofunktio $f\colon A \to [0,\infty]$, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$

kaikille $x \in A$. Lauseesta 6.13 tiedetään, että myös f on mitallinen, mutta onko tällöin lisäksi totta, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm = \int_A f \, dm \quad \Big(= \int_A \lim_{k\to\infty} f_k \, dm \Big).$$

Seuraava esimerkki osoittaa, että tämä **ei välttämättä päde** edes yksinkertaisille funktiolle.

Esimerkki 7.4. (a) Olkoon $f_k \colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$, $f_k(x) = k\chi_{]0,\frac{1}{k}[}(x)$. Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = I(f_k, \mathbb{R}) = k \cdot m\big( ]0, \tfrac{1}{k}[\big) = 1,$$

joten myös $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1$. Toisaalta $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ (mieti!). Näin ollen tässä tapauksessa saadaan

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k \, dm.$$

(b) Olkoon $f_k \colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$, $f_k(x) = \chi_{[k,k+1]}(x)$. Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = I(f_k, \mathbb{R}) = m([k, k+1]) = 1,$$

joten jälleen $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1$. Toisaalta $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ (mieti!), ja siten

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dm = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k \, dm.$$

Sopivien ehtojen vallitessa rajafunktion integraali saadaan kuitenkin integraalien raja-arvona; toisin sanoen, tällöin integraalin ja raja-arvon järjestys voidaan vaihtaa. Esimerkiksi riittää olettaa, että ei-negatiivisten funktioiden f_k jono on kasvava, kuten seuraavassa **monotonisen konvergenssin lauseessa**.

Lause 7.5 (Lebesguen monotoninen konvergenssi; MK-lause)**.** *Olkoot $f_k \colon A \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita siten, että funktiojono (f_k) on kasvava eli $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ kaikille $x \in A$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Jos $f \colon A \to [0,\infty]$, $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikille $x \in A$, niin*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm = \int_A f \, dm. \tag{20}$$

Todistus. Koska $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$ kaikille $x \in A$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin raja-arvot

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) \in [0,\infty] \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \in [0,\infty]$$

ovat aina olemassa, ja Lauseen 6.13 nojalla myös $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ on mitallinen.

Osoitetaan, että kaavassa (20) on voimassa epäyhtälöt molempiin suuntiin:

"$\le$" Koska $f_k(x) \le f(x)$ kaikille $x \in A$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin $\int_A f_k \, dm \le \int_A f \, dm$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ (Lause 7.2 (b)). Tällöin raja-arvon perusominaisuuksien nojalla myös

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \le \int_A f \, dm.$$

"$\geq$" Olkoon $0 < \lambda < 1$ ja olkoon $u \in Y_n^+$ siten, että $u(x) \leq f(x)$ kaikille $x \in A$. Merkitään

$$A_k = \{x \in A : \lambda u(x) \leq f_k(x)\}.$$

Tällöin $A_k \in \mathcal{M}_n$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, ja funktiojonon (f_k) kasvavuuden nojalla

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots$$

Lisäksi $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$, mikä nähdään seuraavasti:

Jos $f(x) = 0$, myös $u(x) = 0$, ja tällöin $x \in A_1$. Jos taas $f(x) > 0$, niin voidaan valita $k \in \mathbb{N}$ siten, että $\lambda u(x) < f_k(x) \leq f(x)$ (sillä $\lambda u(x) < u(x) \leq f(x)$), ja tällöin $x \in A_k$.

Näin ollen Lauseen 5.9 (c)-kohdan perusteella

$$I(u, A) = I\Big(u, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} I(u, A_k).$$

Toisaalta

$$\int_A f_k \, dm \geq \int_{A_k} f_k \, dm \geq \int_{A_k} (\lambda u) \, dm = I(\lambda u, A_k) = \lambda I(u, A_k),$$

missä ensimmäinen epäyhtälö seuraa tiedosta $A_k \subset A$ ja toinen joukon A_k määritelmästä, ja viimeinen yhtäsuuruus on Lauseen 5.8 (b)-kohta. Edelliset tiedot yhdistämällä nähdään, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \geq \lim_{k\to\infty} \lambda I(u, A_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} I(u, A_k) = \lambda I(u, A).$$

Koska tämä pätee kaikille yksinkertaisille funktioille $u \in Y_n^+$, joille $u(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in A$, saadaan Lebesguen integraalin määritelmän nojalla (eli ottamalla supremum yli kaikkien tällaisten yksinkertaisten funktioiden integraalien), että

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \geq \lambda \int_A f \, dm.$$

Kun tässä anneteaan vielä $\lambda \to 1$, saadaan haluttu arvio

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \geq \int_A f \, dm,$$

ja väite on todistettu. $\square$

Monotonisen konvergenssin lause 7.5 ei välttämättä päde, jos kasvavuuden sijasta oletetaankin, että funktiojono (f_k) on vähenevä eli $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_k \geq f_{k+1} \geq \ldots \geq 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$; sopivan esimerkin keksiminen on harjoitustehtävä. Pienellä lisäoletuksella tämäkin tapaus saadaan kuitenkin toimimaan.

Lause 7.6 (MK-lause väheneville funktiojonoille)**.** *Olkoot $f_k \colon A \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita siten, että funktiojono (f_k) on vähenevä eli $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ kaikille $x \in A$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Jos $f \colon A \to [0, \infty]$, $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ kaikille $x \in A$ ja lisäksi*

$$\int_A f_1 \, dm < \infty,$$

niin

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm = \int_A f \, dm.$$

Todistus. Ideana on käyttää MK-lausetta 7.5 kasvavalle jonolle (g_k), missä $g_k = f_1 - f_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Tässä on apua myös joistakin Kappaleen 7.3 tuloksista, mutta kehäpäätelmän vaaraa ei ole, koska todistettavana olevaa Lausetta 7.6 ei Kappaleessa 7.3 tarvita. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Huomaa, että Esimerkin 7.4 funktiojonot näyttävät, että MK-lauseen 7.5 kasvavuusoletusta (tai vastaavasti Lauseen 7.6 vähenevyysoletusta) ei voi poistaa — ainakaan ilman, että sen korvaa jollakin muulla sopivalla lisäoletuksella.

Seuraava esimerkki havainnollistaa MK-lauseen käyttöä.

Esimerkki 7.7. Olkoon $f_k \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \cos\left(\frac{x}{k}\right)e^{-x^3/k}$. Tällöin $f_k(x) \geq 0$ kaikille $x \in [0,1]$ ja funktiot f_k ovat jatkuvina mitallisia. Lisäksi on helppo nähdä, että $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ kaikille $x \in [0,1]$ (totea!). Siten MK-lauseen oletukset ovat voimassa. Koska kaikille $x \in [0,1]$ pätee jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\tfrac{x}{k}\right)e^{-x^3/k} = \cos 0 \cdot e^0 = 1,$$

saadaan MK-lauseesta, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k \, dm = \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} f_k \, dm = \int_{[0,1]} 1 \, dm = 1.$$

7.3. MK-lauseen seurauksia

Lauseet 6.15 ja 7.5 yhdistämällä saadaan välittömästi seuraava approksimaatiotulos:

Seuraus 7.8. *Olkoon $f \colon A \to [0,\infty]$ mitallinen funktio. Tällöin on olemassa yksinkertaiset funktiot $u_k \in Y_n^+$ siten, että*

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots u_k \leq u_{k+1} \leq \dots$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ kaikille $x \in A$ ja

$$\lim_{k\to\infty} \int_A u_k \, dm = \int_A f \, dm.$$

Nyt voidaan todistaa lisää tärkeitä integraalin perusominaisuuksia.

Lause 7.9. *Olkoot $f, g, f_k \colon A \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita, $k \in \mathbb{N}$. Tällöin*

(a) $\displaystyle\int_A (f+g)\, dm = \int_A f \, dm + \int_A g \, dm$

(b) $\displaystyle\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k \, dm.$

Todistus. (a) Seurauksen 7.8 nojalla voidaan valita yksinkertaiset funktiot $u_k, v_k \in Y_n^+$ siten, että jonot (u_k) ja (v_k) ovat kasvavia, $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ ja $\lim_{k\to\infty} v_k(x) = g(x)$ kaikille $x \in A$, sekä

$$\lim_{k\to\infty} \int_A u_k \, dm = \int_A f \, dm \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \int_A v_k \, dm = \int_A g \, dm.$$

Tällöin myös jono $(u_k + v_k)$ on kasvava ja $\lim_{k\to\infty}(u_k+v_k)(x) = (f+g)(x)$ kaikille $x \in A$. Näin ollen MK-lauseen 7.5 ja Lauseen 5.8 (c)-kohdan perusteella

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\,dm &= \int_A \lim_{k\to\infty}(u_k+v_k)\,dm \overset{\text{(MK)}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_A (u_k+v_k)\,dm \\ &\overset{\text{(L.5.8(c))}}{=} \lim_{k\to\infty}\Big(\int_A u_k\,dm + \int_A v_k\,dm\Big) = \int_A f\,dm + \int_A g\,dm.\end{aligned}$$

(b) Induktion avulla (a)-kohdan tulos voidaan yleistää mille tahansa äärelliselle määrälle funktioita, joten kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_A \sum_{k=1}^{N} f_k\,dm = \sum_{k=1}^{N}\int_A f_k\,dm. \tag{21}$$

Merkitään $g_N = \sum_{k=1}^{N} f_k$, jolloin g_N on mitallinen kaikille $N \in \mathbb{N}$ (Lause 6.10 (b) ja helppo induktio). Koska funktiot f_k ovat ei-negatiivisia, on $f_{N+1} \geq 0$, ja siten $g_{N+1} = g_N + f_{N+1} \geq g_N$ kaikille $N \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\lim_{N\to\infty} g_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

joten myös $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ on mitallinen (Lause 6.13). Siispä MK-lauseen nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,dm &= \int_A \lim_{N\to\infty} g_N\,dm \overset{\text{(MK)}}{=} \lim_{N\to\infty}\int_A g_N\,dm \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_A \sum_{k=1}^{N} f_k\,dm \overset{(21)}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_A f_k\,dm = \sum_{k=1}^{\infty}\int_A f_k\,dm,\end{aligned}$$

kuten haluttiin. □

Lauseessa 5.9 esiintyneillä yksinkertaisten funktioiden integraalien ominaisuuksilla on vastineet myös ei-negatiivisten funktioiden Lebesguen integraaleille. Lauseen 7.10 (a)-kohdan subadditiivisuus pätee kaikille mitallisille joukoille, kun taas kohta (b) kertoo, että integraali on additiivinen erillisten mitallisten joukkojen suhteen.

Lause 7.10. *Olkoot $A_j \in \mathcal{M}_n$ mitallisia joukkoja ja olkoon $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Oletetaan lisäksi, että $f\colon A \to [0,\infty]$ on mitallinen funktio. Tällöin*

(a) $\displaystyle\int_A f\,dm \leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j} f\,dm.$

(b) $\displaystyle\int_A f\,dm = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j} f\,dm,$ *jos joukot A_j ovat lisäksi erillisiä.*

(c) *Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, niin*

$$\int_A f\,dm = \lim_{j\to\infty}\int_{A_j} f\,dm.$$

(d) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ *ja lisäksi* $\int_{A_1} f\,dm < \infty$, *niin*

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j} f\,dm = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f\,dm.$$

Todistus. (a) Tämä saadaan helposti suoraan integraalin määritelmästä ja vastaavasta yksinkertaisten funktioiden integraalin ominaisuudesta (Lause 5.9 (a)); perustelut ovat hyvä harjoitustehtävä.

(b) Myös tämä kohta on mahdollista perustella vastaavan yksinkertaisten funktioiden integraalin ominaisuuden avulla (Lause 5.9 (b)), mutta helpompi todistus saadaan, kun käytetään apuna edellä todistettuja tuloksia. Määritellään funktiot $f_j \colon A \to [0, \infty]$, $f_j(x) = f(x)\chi_{A_j}(x)$. Tällöin $f_j(x) = f(x)$ kun $x \in A_j$ ja $f_j(x) = 0$ kun $x \notin A_j$, mistä seuraa (vertaa nollajatkoon), että

$$\int_A f_j\,dm = \int_{A_j} f_j\,dm = \int_{A_j} f\,dm \qquad \text{kaikille } j \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Koska joukot A_j ovat erillisiä, niin jokaisella $x \in A$ on olemassa yksikäsitteinen $j \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in A_j$. Toisaalta funktioiden f_j määritelmän mukaan $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ kaikille $x \in A$. Näin ollen Lauseen 7.9 (b)-kohdan nojalla saadaan, että

$$\int_A f\,dm = \int_A \sum_{j=1}^{\infty} f_j\,dm \overset{(\text{L.}7.9(\text{b}))}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_A f_j\,dm \overset{(22)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\,dm,$$

kuten haluttiin.

(c)- ja (d)-kohtien todistukset jätetään harjoitustehtäviksi. □

Nollamittaiset joukot ovat mitan ja integraalin kannalta huomaamattomia, joten yleensä riittää tarkastella mitä tapahtuu nollamittaisten joukkojen ulkopuolella. Tässä yhteydessä on tapana käyttää seuraavaa terminologiaa.

Määritelmä 7.11 (”Melkein kaikilla”)**.** Sanotaan, että ominaisuus $P(x)$ pätee **melkein kaikilla** (m.k.) $x \in A$ tai **melkein kaikkialla** joukossa A, jos on olemassa nollamittainen joukko $N \subset A$ (eli $m(N) = 0$) siten, että ominaisuus $P(x)$ pätee kaikille $x \in A \setminus N$; toisin sanoen, joukko, jossa ominaisuus P ei päde on nollamittainen.

Esimerkki 7.12. Melkein kaikki luvut $x \in \mathbb{R}$ ovat irrationaalilukuja.

Lemma 7.13. *Olkoon* $A \in \mathcal{M}_n$ *ja olkoot* $f, g \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ *funktioita. Jos* f *on mitallinen ja* $g(x) = f(x)$ *melkein kaikille* $x \in A$, *niin myös* g *on mitallinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 7.14. *Olkoon* $f \colon A \to [0, \infty]$ *mitallinen. Tällöin pätee:*

(a) $\displaystyle\int_A f\,dm = 0$ *jos ja vain jos* $f(x) = 0$ *melkein kaikille* $x \in A$.

(b) *Jos* $\displaystyle\int_A f\,dm < \infty$, *niin* $f(x) < \infty$ *melkein kaikille* $x \in A$.

Todistus. (a) Merkitään $N = \{x \in A : f(x) > 0\}$.

"$\Leftarrow$": Oletuksen mukaan $m(N) = 0$ ja siten $\int_N f\,dm = 0$. Toisaalta kaikille $x \in A \setminus N$ pätee $f(x) = 0$, joten myös $\int_{A\setminus N} f\,dm = 0$. Näin ollen integraalin additiivisuuden nojalla

$$\int_A f\,dm = \int_{A\setminus N} f\,dm + \int_N f\,dm = 0 + 0 = 0.$$

"$\Rightarrow$" Nyt pitää siis osoittaa, että $m(N) = 0$. Merkitään $A_j = \{x \in A : f(x) > \frac{1}{j}\}$. Tällöin oletuksen ja Tšebyšovin epäyhtälön (Lause 7.3) perusteella kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$0 = \int_A f\,dm \overset{(\mathrm{L.}7.3)}{\geq} \tfrac{1}{j} m(A_j) \geq 0,$$

ja siten täytyy olla $m(A_j) = 0$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Mitan subadditiivisuuden perusteella

$$m(N) = m\big(\{x \in A : f(x) > 0\}\big) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m(A_j)}_{=0} = 0,$$

joten todella $f(x) = 0$ melkein kaikille $x \in A$.

(b) Olkoon nyt $N = \{x \in A : f(x) = \infty\}$. Tšebyšovin epäyhtälön mukaan kaikille $\lambda > 0$ pätee

$$m(N) \leq m\big(\{x \in A : f(x) > \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f\,dm.$$

Koska $0 \leq \int_A f\,dm < \infty$, on

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_A f\,dm = 0,$$

ja näin ollen täytyy olla $m(N) = 0$, kuten haluttiinkin. □

Seuraava lause kertoo, että nollamittaiset joukot eivät vaikuta integraalien arvoon.

Lause 7.15. *Oletetaan, että $f, g \colon A \to [0, \infty]$ ovat mitallisia funktioita ja että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in A$. Tällöin*

$$\int_A f\,dm = \int_A g\,dm.$$

Todistus. Ideana on käyttää integraalin additiivisuutta sekä tietoa, että joukko $N = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ on nollamittainen. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

Käsitellään luvun lopuksi vielä yksi tärkeä konvergenssitulos, joka on läheisessä yhteydessä MK-lauseeseen.

Lause 7.16 (Fatoun lemma)**.** *Olkoot $f_k \colon A \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k\,dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm.$$

Todistus. Merkitään $g_k = \inf_{j\geq k} f_j$, jolloin $g_k \leq f_k$ ja g_k on mitallinen kaikille $k \in \mathbb{N}$ (Lause 6.12). Lisäksi

$$g_k = \inf_{j\geq k} f_j \leq \inf_{j\geq k+1} f_j = g_{k+1},$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten jono (g_k) on kasvava. Näin ollen MK-lause 7.5 soveltuu funktioihin g_k, ja saadaan, että

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k\,dm = \int_A \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j\,dm = \int_A \lim_{k\to\infty} g_k\,dm \overset{(\mathrm{MK})}{=} \lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm$$
$$= \liminf_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm.$$

Tässä ensimmäinen yhtäsuuruus on suoraan funktion $\liminf_{k\to\infty} f_k$ määritelmä ja viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $g_k \leq f_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

Huomaa, että edellä raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm \in [0,\infty]$ on olemassa jonon (g_k) kasvavuuden nojalla, ja siten $\lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm = \liminf_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm$. □

Huomautus. On olemassa mitalliset funktiot $f_k\colon A \to [0,\infty]$, joille Fatoun lemmassa pätee aito epäyhtälö eli

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k\,dm < \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm.$$

Tällaisen esimerkin keksiminen on harjoitustehtävä.

***Huomautus 7.17.** (a) Yleisesti ottaen Fatoun Lemma 7.16 ei päde, jos alaraja-arvon lim inf paikalle vaihdetaan yläraja-arvo lim sup. Vastaesimerkiksi kelpaavat vaikkapa funktiot $f_k\colon [0,2] \to [0,\infty[$,

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 + (-1)^k, & \text{jos } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + (-1)^{k+1}, & \text{jos } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Tällöin f_k saa välin $[0,2]$ yhdellä puolikkaalla arvon 0 ja toisella puolikkaalla arvon 2, mutta nämä arvot vaihtuvat aina puolelta toiselle kun k kasvaa. Selvästi $\int_{[0,2]} f_k\,dm = 2$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, joten myös $\limsup_{k\to\infty} \int_{[0,2]} f_k\,dm = 2$. Toisaalta $\limsup_{k\to\infty} f_k(x) = 2$ kaikille $x \in [0,2]$, ja siten

$$\int_{[0,2]} \limsup_{k\to\infty} f_k\,dm = 4 > 2 = \limsup_{k\to\infty} \int_{[0,2]} f_k\,dm.$$

Huomaa, että $\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ kaikille $x \in [0,2]$, joten Fatoun lemman väite toki pätee näille funktioille, kuten kuuluukin.

(b) On olemassa myös niin sanottu *käänteinen Fatoun lemma*, jossa lim sup esiintyy. Tähän palataan hieman myöhemmin, kun on ensin määritelty integraali ja integroituvuus muillekin kuin ei-negatiivisille funktioille; katso *Huomautus 8.12.

8.1. Määritelmä ja perusominaisuuksia

Kun $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen funktio, niin $f = f^+ - f^-$, missä $f^+ \geq 0$ ja $f^- \geq 0$ ovat mitallisia (Lemma 6.8 (b)). Tällöin on olemassa integraalit $\int_A f^+\,dm \in [0,\infty]$ ja $\int_A f^-\,dm \in [0,\infty]$, joiden avulla voimme nyt määritellä integraalin myös funktiolle f, kunhan ei jouduta määrittelemättömään "$\infty - \infty$" -tilanteeseen.

Määritelmä 8.1. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio.

(a) Jos $\int_A f^+\,dm < \infty$ tai $\int_A f^-\,dm < \infty$, määritellään funktion f **Lebesguen integraali** yli joukon A asettamalla

$$\int_A f\,dm = \int_A f^+\,dm - \int_A f^-\,dm.$$

(b) Jos $\int_A f^+\,dm < \infty$ ja $\int_A f^-\,dm < \infty$, niin sanotaan, että f on **Lebesgue-integroituva** (yli joukon A), ja merkitään, että $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Tällöin integraali

$$\int_A f\,dm = \int_A f^+\,dm - \int_A f^-\,dm$$

on siis olemassa reaalilukuna.

Huomautus. (a) Jos $\int_A f^+\,dm = \infty$ ja $\int_A f^-\,dm = \infty$, ei näiden erotus ole hyvin määritelty, koska se on muotoa "$\infty - \infty$", ja tällöin myöskään integraalia $\int_A f\,dm$ ei ole määritelty.

(b) Ei-negatiivinen funktio $f\colon A \to [0,\infty]$ on Lebesgue-integroituva jos ja vain jos $\int_A f\,dm < \infty$. Tämä seuraa suoraan siitä, että $f = f^+$.

(c) Merkintä $f \in \mathcal{L}^1(A)$ pitää sisällään oletuksen, että f on mitallinen, jolloin myös joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ tulee olla mitallinen.

Integroituvuudelle saadaan useita yhtäpitäviä ehtoja.

Lemma 8.2. *Oletetaan, että $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) *f on Lebesgue-integroituva (yli joukon A).*

(b) *On olemassa $u, v \in \mathcal{L}^1(A)$ siten, että $u, v \geq 0$ ja $f = u - v$.*

(c) *On olemassa $g \in \mathcal{L}^1(A)$ siten, että $|f| \leq g$.*

(d) *$|f|$ on Lebesgue-integroituva (yli joukon A) eli $\int_A |f|\,dm < \infty$.*

Todistus. (a) $\Longrightarrow$ (b): Tässä voidaan valita $u = f^+$ ja $v = f^-$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Valitaan nyt $g = u + v \geq 0$. Tällöin g on integroituva, sillä Lauseen 7.9 nojalla

$$\int_A g\,dm = \int_A u\,dm + \int_A v\,dm < \infty,$$

koska u ja v ovat integroituvia. Lisäksi kolmioepäyhtälön perusteella

$$|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = u + v = g.$$

(c) $\implies$ (d): Koska f on mitallinen, myös $|f|$ on mitallinen (Lause 6.10). Lisäksi $|f|^+ = |f| \leq g$ ja $|f|^- = 0$, joten Lauseen 7.2 (b)-kohdan perusteella

$$\int_A |f|^+ \, dm \leq \int_A g \, dm < \infty$$

ja toisaalta

$$\int_A |f|^- \, dm = 0 < \infty.$$

Näin ollen $|f|$ on intergoituva.

(d) $\implies$ (a): Koska $|f| = f^+ + f^-$, missä $f^+ \geq 0$ ja $f^- \geq 0$, niin $0 \leq f^+ \leq |f|$ ja $0 \leq f^- \leq |f|$. Siten oletuksen nojalla

$$\int_A f^\pm \, dm \leq \int_A |f| \, dm < \infty,$$

jolloin määritelmän mukaan myös f on integroituva. $\square$

Lebesgue-integroituville funktiolle pätee tuttu additiivisuusominaisuus erillisten mitallisten joukkojen suhteen. Huomaa kuitenkin, että subadditiivisuus ei välttämättä päde integroituville funktioille (miksi ei?).

Lause 8.3 (Integraalin additiivisuus)**.** *Oletetaan, että joukot $A_j \in \mathcal{M}_n$ ovat erillisiä, ja merkitään $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Jos $f \in \mathcal{L}^1(A)$, niin*

$$\int_A f \, dm = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f \, dm.$$

Todistus. Väite seuraa helposti, kun Lauseen 7.10 (b)-kohtaa sovelletaan erikseen funktioihin f^+ ja f^-. $\square$

Nollamittaiset joukot eivät edelleenkään vaikuta integraalien arvoihin; vertaa Lauseen 7.15 tilanteeseen, jossa vastaava tulos on muotoiltu ei-negatiivisille mitallisille funktioille.

Lause 8.4. *Oletetaan, että $f, g \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat Lebesgue-integroituvia funktioita ja että $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in A$. Tällöin*

$$\int_A f \, dm = \int_A g \, dm.$$

Todistus. Todistus on käytännössä aivan sama, kun Lauseen 7.15 todistus, nyt vain käytetään additiivisuuteen Lausetta 8.3. $\square$

Huomautus 8.5. (a) Olkoon $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Lemman 8.2 (d)-kohdan nojalla myös $|f| \in \mathcal{L}^1(A)$, joten $\int_A |f| \, dm < \infty$. Siten Lauseen 7.14 (b)-kohdasta seuraa, että $|f(x)| < \infty$ melkein kaikilla $x \in A$; toisin sanoen, $f(x) \in \mathbb{R}$ melkein kaikilla $x \in A$.

(b) Koska nollamittaiset joukot eivät vaikuta integraalien arvoon, niin esimerkiksi Lemmassa 8.2 riittää, että (b)-kohdan tilanteessa $u(x) \geq 0$ ja $v(x) \geq 0$ pätevät melkein kaikille $x \in A$ ja samoin $f(x) = u(x) - v(x)$ melkein kaikille $x \in A$. Vastaavasti (c)-kohdassa riittää, että $|f(x)| \leq g(x)$ melkein kaikille $x \in A$.

Lause 8.6 (Integraalin lineaarisuus)**.** *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$ ja että $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat Lebesgue-integroituva. Tällöin myös*

(a) *funktio $\lambda f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_A \lambda f \, dm = \lambda \int_A f \, dm.$$

(b) *funktio $f + g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_A (f + g) \, dm = \int_A f \, dm + \int_A g \, dm.$$

Todistus. (a) Harjoitustehtävä

(b) Huomautuksen 8.5 (a)-kohdan mukaan $|f| < \infty$ ja $|g| < \infty$ melkein kaikkialla joukossa A. Siten tässä ei tarvitse välittää joukosta, jossa summa $f + g$ ei ole määritelty, koska tämä joukko ei nollamittaisena vaikuta integraalin arvoon.

Lemman 8.2 (d)-kohdan nojalla $|f|$ ja $|g|$ ovat integroituvia, jolloin myös $|f| + |g|$ on integroituva. Kolmioepäyhtälön nojalla $|f + g| \leq |f| + |g|$, joten myös $f + g$ on integroituva Lemman 8.2 (c)-kohdan perusteella.

Kun kirjoitetaan $f + g$ kahdella eri tavalla positiivi- ja negatiiviosien summana, nähdään että

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ja siten

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+,$$

missä molemmilla puolilla on ei-negatiivisten funktioiden summa. Siten Lausetta 7.9 käyttämällä saadaan, että

$$\int_A (f+g)^+ \, dm + \int_A f^- \, dm + \int_A g^- \, dm = \int_A (f+g)^- \, dm + \int_A f^+ \, dm + \int_A g^+ \, dm. \quad (23)$$

Funktio $f + g$ tunnetaan jo integroituvaksi, ja näin ollen kaavassa (23) sopivasti termejä siirtäen nähdään, että

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) \, dm &= \int_A (f + g)^+ \, dm - \int_A (f + g)^- \, dm \\ &\overset{(23)}{=} \int_A f^+ \, dm - \int_A f^- \, dm + \int_A g^+ \, dm - \int_A g^- \, dm \\ &= \int_A f \, dm + \int_A g \, dm, \end{aligned}$$

kuten haluttiinkin. □

Todistetaan vielä muutamia integraalien perusominaisuuksia.

Lause 8.7. *Olkoot* $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$.

(a) *Jos* $f(x) \leq g(x)$ *melkein kaikilla* $x \in A$*, niin* $\int_A f\,dm \leq \int_A g\,dm$.

(b) $\left|\int_A f\,dm\right| \leq \int_A |f|\,dm.$ (kolmioepäyhtälö)

Todistus. (a) Olkoon $N = \{x \in A : f(x) > g(x)\}$, jolloin oletuksen mukaan $m(N) = 0$. Kun $x \in A \setminus N$, on $f^+(x) \leq g^+(x)$ ja $f^-(x) \geq g^-(x)$ (totea!), ja siten integraalin määritelmän ja Lauseen 7.2 (b)-kohdan nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_A f\,dm &= \int_{A\setminus N} f\,dm = \int_{A\setminus N} f^+\,dm - \int_{A\setminus N} f^-\,dm \\ &\overset{(\text{L.}7.2(\text{b}))}{\leq} \int_{A\setminus N} g^+\,dm - \int_{A\setminus N} g^-\,dm = \int_{A\setminus N} g\,dm = \int_A g\,dm.\end{aligned}$$

(b) Koska $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ kaikilla $x \in A$, niin (a)-kohdan nojalla

$$-\int_A |f|\,dm = \int_A -|f|\,dm \leq \int_A f\,dm \leq \int_A |f|\,dm.$$

Tästä seuraa, että

$$\left|\int_A f\,dm\right| \leq \int_A |f|\,dm.$$

(Muista: Kun $a \geq 0$, niin $|z| \leq a \iff -a \leq z \leq a$.) □

Lause 8.8. *Olkoot* $A_1, A_2, \ldots$ *mitallisia joukkoja ja olkoon* $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$*. Oletetaan lisäksi, että* $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ *on Lebesgue-integroituva.*

(a) *Jos* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$*, niin* $\int_A f\,dm = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f\,dm.$

(b) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$*, niin* $\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j} f\,dm = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f\,dm.$

Todistus. Väitteet seuraavat, kun Lauseen 7.10 (c)- ja (d)-kohtia sovelletaan funktioihin f^+ ja f^-. Yksityiskohdat ovat harjoitustehtäviä. □

Huomautus. Tässä kohdassa on hyvä huomata, että Lauseen 8.8 tulokset voidaan ajatella mittoja koskevan Lauseen 4.6 (b)- ja (c)-kohtien yleistyksinä integraaleille. Todistus noudattelee yleistä periaatetta, jonka mukaan yleistykset tehdään ensin yksinkertaisille funktioille (Lause 5.9 (c) ja (d)) ja tämän jälkeen ei-negatiivisille funktioille (Lause 7.10 (c) ja (d)). Lopulta tulokset saadaan integroituville funktioille positiivi- ja negatiiviosien avulla.

Huomaa, että toisin kuin muissa sisäkkäisten joukkojen leikkausta $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ koskevissa tuloksissa, ei Lauseen 8.8 (b)-kohdassa tarvita erillistä äärellisyysoletusta, koska tämä sisältyy jo oletukseen, että f on integroituva.

8.2. **Dominoitu konvergenssi**

Integroituville funktioille $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ pätee seuraava tärkeä konvergenssitulos, jossa MK-lauseiden monotononisuuden sijasta oletetaan, että funktioita f_k saadaan *dominoitua* integroituvalla funktiolla g.

Lause 8.9 (Lebesguen dominoitu konvergenssi; DK-lause)**.** *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoot $f, f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallisia funktioita siten, että*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad (\textit{melkein}) \textit{ kaikille } x \in A.$$

Oletetaan lisäksi, että on olemassa funktio $g \in \mathcal{L}^1(A)$ siten, että kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad (\textit{melkein}) \textit{ kaikille } x \in A. \tag{24}$$

Tällöin myös $f \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, ja

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\, dm = \int_A f\, dm.$$

(On oleellista, että kaavassa (24) **sama** funktio g dominoi kaikkia funktioita f_k.)

Todistus. Koska $|f_k(x)| \leq g(x)$ m.k. $x \in A$ ja g on integroituva, seuraa Lemmasta 8.2 suoraan, että myös $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Merkitään sitten

$$A_0 = \{x \in A : f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ ja } |f_k(x)| \leq g(x) \text{ kaikille } k \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin $m(A \setminus A_0) = 0$ (mieti) ja $|f(x)| \leq g(x)$ kaikille $x \in A_0$ (eli m.k. $x \in A$), joten Lemman 8.2 perusteella myös $f \in \mathcal{L}^1(A)$.

Tällöin erityisesti melkein kaikille $x \in A$ pätee, että $|g(x)| < \infty$, $|f(x)| < \infty$ ja $|f_k(x)| < \infty$, joten funktiot $g \pm f_k$ sekä $g \pm f$ on määritelty m.k. joukossa A ja ne ovat integroituvia Lauseen 8.6 perusteella. Lisäksi oletuksen (24) nojalla pätee $g \pm f_k \geq 0$ sekä $g \pm f \geq 0$ m.k. joukossa A. Siten integraalin lineaarisuuden (Lause 8.6) sekä Fatoun lemman (Lause 7.16) avulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_A g\, dm + \int_A f\, dm &= \int_A \underbrace{(g+f)}_{=\liminf\limits_{k\to\infty}(g+f_k)}\, dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A (g+f_k)\, dm \\ &= \int_A g\, dm + \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, dm.\end{aligned}$$

Koska $\int_A g\, dm < \infty$, seuraa tästä, että

$$\int_A f\, dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, dm.$$

Toisaalta pätee myös

$$\begin{aligned}\int_A g\, dm - \int_A f\, dm &= \int_A \underbrace{(g-f)}_{=\liminf\limits_{k\to\infty}(g-f_k)}\, dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A (g-f_k)\, dm \\ &= \int_A g\, dm + \underbrace{\liminf_{k\to\infty} \int_A (-f_k)\, dm}_{=-\limsup\limits_{k\to\infty} \int_A f_k\, dm},\end{aligned}$$

joten

$$-\int_A f\,dm \le -\limsup_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm$$

eli yhtäpitävästi

$$\int_A f\,dm \ge \limsup_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm.$$

Koska aina $\liminf \le \limsup$, nähdään edelliset tiedot yhdistämällä, että

$$\limsup_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm \le \int_A f\,dm \le \liminf_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm \le \limsup_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm,$$

mistä seuraa, että todella

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm = \int_A f\,dm.$$

□

Erikoistapauksena dominoidun konvergenssin lauseesta saadaan seuraava tulos, joka toimii vain äärellismittaisissa joukoissa.

Seuraus 8.10 (Rajoitettu konvergenssi)**.** *Oletetaan, että $A \in \mathcal{M}_n$ ja että $m(A) < \infty$. Olkoot $f, f_k \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallisia funktioita siten, että*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \textit{(melkein) kaikille } x \in A.$$

Oletetaan lisäksi, että on olemassa vakio $0 < M < \infty$ siten, että kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|f_k(x)| \le M \quad \textit{(melkein) kaikille } x \in A.$$

Tällöin $f \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, ja

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,dm = \int_A f\,dm.$$

Todistus. Koska $m(A) < \infty$, voidaan DK-lauseessa 8.9 valita $g(x) = M$ kaikille $x \in A$, ja väite seuraa. □

Esimerkkejä DK-lauseen käytöstä nähdään seuraavassa luvussa, kun on ensin tutustuttu Riemannin ja Lebesguen integraalien yhteyteen.

***Huomautus 8.11.** Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $1 \le p < \infty$. Määritellään

$$\mathcal{L}^p(A) = \Big\{ f \colon A \to \overline{\mathbb{R}} \;\Big|\; f \text{ on mitallinen ja } \int_A |f|^p\,dm < \infty \Big\}.$$

Lemman 8.2 (d)-kohdan perusteella tämä joukko on tapauksessa $p = 1$ täsmälleen sama, kuin Määritelmässä 8.1 annettu Lebesgue-integroituvien funktioiden joukko $\mathcal{L}^1(A)$. Jos $m(A) < \infty$ ja $f \in \mathcal{L}^p(A)$ jollekin $1 < p < \infty$, niin $f \in \mathcal{L}^1(A)$, mutta tämä ei välttämättä päde, jos $m(A) = \infty$; näiden perustelut ovat harjoitustehtäviä.

Joukot $\mathcal{L}^p(A)$ ja etenkin niistä pienellä muutoksella saatavat $L^p(A)$-funktioavaruudet ovat erittäin keskeisiä modernissa analyysissa. Näihin tutustutaan tarkemmin kurssilla MIT 2; katso Luku 16.

***Huomautus 8.12.** Käänteisessä Fatoun lemmassa oletetaan, että $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat mitallisia funktioita ja että lisäksi on olemassa $g \in \mathcal{L}^1(A)$ siten, että $f_k \leq g$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee, että

$$\limsup_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \leq \int_A \limsup_{k\to\infty} f_k \, dm.$$

Tämä tulos voidaan todistaa käyttämällä Fatoun lemmaa funktioihin $g - f_k \geq 0$, sekä tietoa, että $\liminf_{k\to\infty}(-f_k) = -\limsup_{k\to\infty} f_k$.

Kerrataan aluksi Riemannin integraalin määritelmä; katso myös Kappale 1.2.3. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja olkoon $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ välin $[a,b]$ jako, jolloin siis $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$. Merkitään lisäksi $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ sekä

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \qquad \text{ja} \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x),$$

kaikille $i = 1, 2, \ldots, N$. Jakoon P liittyvät funktion f ala- ja yläsummat ovat

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{ja} \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Tällöin funktion f **ala- ja yläintegraalit** yli välin $[a,b]$ ovat

$$\text{ala} \int_a^b f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$

ja

$$\text{ylä} \int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}.$$

Funktio f on **Riemann-integroituva** (yli välin $[a,b]$) jos

$$\text{ala} \int_a^b f(x)\,dx = \text{ylä} \int_a^b f(x)\,dx,$$

ja tällöin funktion f **Riemann-integraali** yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ala} \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \text{ylä} \int_a^b f(x)\,dx \right).$$

Huomautus 9.1. Välin $[a,b]$ jakoon $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ liittyvät funktion f ala- ja yläsummat voidaan esittää yksinkertaisten funktioiden integraaleina seuraavasti. Merkitään $\widehat{I}_i = \,]x_{i-1}, x_i]$, kun $i = 1, 2, \ldots, N$, ja asetetaan lisäksi $\widehat{I}_0 = \{x_0\}$ ja $m_0 = M_0 = f(x_0)$. Olkoot nyt $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yksinkertaisia funktioita, joiden normaaliesitykset ovat

$$u(x) = \sum_{i=0}^{N} m_i \chi_{\widehat{I}_i}(x) \qquad \text{ja} \qquad v(x) = \sum_{i=0}^{N} M_i \chi_{\widehat{I}_i}(x).$$

Tällöin kaikille $x \in [a,b]$ pätee selvästi, että $u(x) \le f(x) \le v(x)$, ja lisäksi yksinkertaisten funktioiden Lebesgue-integraalin määritelmän mukaan

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{N} m_i\, m(\widehat{I}_i) = \sum_{i=0}^{N} m_i\, m(\widehat{I}_i \cap [a,b]) = I(u, [a,b])$$

ja

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{N} M_i\, m(\widehat{I}_i) = \sum_{i=0}^{N} M_i\, m(\widehat{I}_i \cap [a,b]) = I(v, [a,b]).$$

Huomautuksessa 9.1 esitetyn tulkinnan sekä MK-lauseiden avulla voidaan nyt perustella Riemannin ja Lebesguen integraalien välinen yhteys.

Lause 9.2. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integroituva funktio. Tällöin* f *on mitallinen ja Lebesgue-integroituva, ja*

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Oletetaan, että $f \geq 0$; yleinen tapaus seuraa, kun tutkitaan erikseen funktion positiivi- ja negatiiviosia f^+ ja f^-. Riemann-integraalin määritelmän perusteella voidaan löytää välin $[a,b]$ jaot P_k ja Q_k siten, että

$$\lim_{k\to\infty} L(f,P_k) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} U(f,Q_k).$$

Olkoot u_k ja v_k näitä jakoja vastaavat yksinkertaiset funktiot kuten Huomautuksessa 9.1, jolloin siis $0 \leq u_k(x) \leq f(x) \leq v_k(x)$ kaikille $x \in [a,b]$ ja

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k,[a,b]) = \lim_{k\to\infty} L(f,P_k) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} U(f,Q_k) = \lim_{k\to\infty} I(v_k,[a,b]).$$

Voidaan myös olettaa, että jono (u_k) on kasvava ja jono (v_k) on vähenevä; jos näin ei ole, voidaan esimerkiksi siirtyä tutkimaan funktioita

$$\widetilde{u}_k(x) = \max\{u_1(x),u_2(x),\dots,u_k(x)\} \quad \text{ja} \quad \widetilde{v}_k(x) = \min\{v_1(x),v_2(x),\dots,v_k(x)\}.$$

Koska jono (u_k) on kasvava ja $u_k(x) \leq f(x) < \infty$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja kaikille $x \in [a,b]$, on olemassa raja-arvofunktio $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) \leq f(x) \quad \text{kaikille } x \in [a,b].$$

Vastaavasti on funktio $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = v(x) \geq f(x) \quad \text{kaikille } x \in [a,b].$$

Funktiot u ja v ovat mitallisia Lauseen 6.13 perusteella ja $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ kaikille $x \in [a,b]$. Lisäksi monotonisen konvergenssin lauseiden nojalla

$$\int_{[a,b]} u\,dm \overset{\text{(L.7.5)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} u_k\,dm = \lim_{k\to\infty} I(u_k,[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{25}$$

ja

$$\int_{[a,b]} v\,dm \overset{\text{(L.7.6)}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} v_k\,dm = \lim_{k\to\infty} I(v_k,[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx;$$

huomaa, että vähenevien jonojen MK-lauseessa 7.6 tarvittava lisäoletus on voimassa, koska $\int_{[a,b]} v_1\,dm \leq M(b-a) < \infty$, missä $M < \infty$ on (joku) funktion f yläraja.

Tällöin Lauseen 8.6 perusteella

$$\int_{[a,b]} (v-u)\,dm = \int_{[a,b]} v\,dm - \int_{[a,b]} u\,dm = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

mistä seuraa Lauseen 7.14 nojalla, että $v - u = 0$ melkein kaikkialla joukossa $[a,b]$ eli $u(x) = v(x)$ melkein kaikille $x \in [a,b]$. Koska lisäksi $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ kaikille $x \in [a,b]$, täytyy siis olla $u(x) = f(x) = v(x)$ melkein kaikille $x \in [a,b]$. Lemman 7.13

nojalla tällöin myös funktio f on mitallinen, kuten haluttiin, ja lisäksi Lausen 8.4 perusteella

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} u\,dm.$$

Kun tämä yhdistetään kaavan (25) tietoon, saadaan

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} u\,dm \overset{(25)}{=} \int_a^b f(x)\,dx,$$

ja lause on todistettu. □

Huomautus. Lause 9.2 pätee myös avaruuden $\mathbb{R}^n$ Riemann-integroituville funktiolle; todistuskin on oleellisesti sama.

Lauseesta 9.2 saadaan versiot myös epäoleellisille Riemann-integraaleille.

Lause 9.3. *Olkoon $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja oletetaan, että funktiolla $f\colon [a,b[\, \to \mathbb{R}$ on olemassa (äärellinen) epäoleellinen Riemann-integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx \quad \in \mathbb{R}$$

Tällöin f on mitallinen. Jos lisäksi pätee, että joko

(a) $f(x) \geq 0$ *kaikille* $x \in [a,b[$, *tai*

(b) *integraali* $\int_a^b f(x)\,dx$ *suppenee itseisesti eli on olemassa epäoleellinen integraali* $\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c |f(x)|\,dx < \infty$,

niin f on Lebesgue-integroituva ja

$$\int_{[a,b[} f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Merkitään

$$b_k = \begin{cases} b - \frac{b-a}{k}, & \text{jos } b \in \mathbb{R} \\ a + k, & \text{jos } b = \infty \end{cases}$$

ja asetetaan, että $I_k = [a, b_k]$. Oletuksen nojalla funktio f on Riemann-integroituva jokaisella välillä I_k, joten Lauseen 9.2 perusteella f on myös mitallinen kaikilla näillä väleillä. Koska $[a,b[\, = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$, seuraa tästä, että f on mitallinen koko välillä $[a,b[$.

(a) Oletetaan siis, että $f(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a,b[$. Tällöin Lauseen 7.10 (c)-kohdan, Lauseen 9.2 sekä epäoleellisen Riemann-integraalin määritelmän perusteella

$$\int_{[a,b[} f\,dm \overset{(\text{L.}7.10(\text{c}))}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f\,dm \overset{(\text{L.}9.2)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^{b_k} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx < \infty,$$

mikä todistaa väitteen.

(b) Jos on olemassa epäoleellinen integraali $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$, niin on olemassa myös epäoleelliset integraalit $\int_a^b f^+(x)\,dx < \infty$ ja $\int_a^b f^-(x)\,dx < \infty$, sillä $|f| = f^+ + f^-$ ja $f^+, f^- \geq 0$. Tällöin (a)-kohtaa voidaan soveltaa erikseen positiivi- ja negatiiviosiin, ja väite seuraa. □

Huomautus. (a) Lause 9.3 pätee vastaavaan tapaan myös tapauksissa, joissa funktion f "epäoleellisuuspiste" on integroimisvälin alaraja $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(b) Jos epäoleellinen Riemann-integraali
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx \ \in \mathbb{R}$$
on olemassa, mutta integraali ei suppenee itseisesti, ei funktio f ole Lebesgue-integroituva. Syy tähän on se, että tässä tilanteessa välttämättä
$$\int_{[a,b]} f^+\,dm = \infty = \int_{[a,b]} f^-\,dm.$$
Eräs esimerkki tällaisesta on funktio $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Näissä tapauksissa epäoleellisessa Riemann-integraalissa positiivi- ja negatiiviosat kumoavat sopivasti toisiaan, jolloin äärellinen raja-arvo $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ on olemassa, vaikka funktiolla f ei ole Lebesgue-integraalia.

Esimerkki 9.4. Määritetään raja-arvo
$$\lim_{k \to \infty} \int_0^\infty e^{-kx} \cos x\,dx.$$
Olkoot $f_k\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{-kx} \cos x$. Tällöin
$$|f_k(x)| = |e^{-kx} \cos x| \le |e^{-kx}| = e^{-kx} \le e^{-x}$$
kaikille $x \in [0,\infty[$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Määritellään funktio $g\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$, $g(x) = e^{-x}$. Tällöin $|f_k(x)| \le g(x)$ kaikille $x \in [0,\infty[$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi
$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_0^c e^{-x}\,dx = \lim_{c \to \infty} \big(-e^{-c} - (-e^{-0}) \big) = \lim_{c \to \infty} (1 - e^{-c}) = 1,$$
joten Lauseen 9.3 (a)-kohdan perusteella $\int_{[0,\infty[} g(x)\,dx = \int_0^\infty g(x)\,dx = 1$. Näin ollen g on Lebesgue-integroituva eli $g \in \mathcal{L}^1([0,\infty[)$. DK-lauseen 8.9 oletukset ovat siten voimassa. Koska
$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} e^{-kx} \cos x = 0 \qquad \text{melkein kaikille } x \ge 0$$
(sillä $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = 0$ kaikille $x > 0$ ja $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(0) = 1$) ja majoranttiperiaatten mukaan myös epäoleelliset Riemann-integraalit $\int_0^\infty f_k(x)\,dx$ suppenevat itseisesti (sillä $|f_k(x)| \le g(x)$), saadaan Lauseen 9.3 (b)-kohdan ja DK-lauseen nojalla, että
$$\lim_{k \to \infty} \int_0^\infty f_k(x)\,dx \overset{(\text{L.}9.3(\text{b}))}{=} \lim_{k \to \infty} \int_{[0,\infty[} f_k\,dm \overset{(\text{DK})}{=} \int_{[0,\infty[} \lim_{k \to \infty} f_k\,dm = \int_{[0,\infty[} 0\,dm = 0.$$

Mainitaan tämän luvun lopuksi vielä lause, joka ei suoraan liity Lebesgue-integraalin teoriaan, vaan antaa mittateoreettisen ehdon sille, milloin rajoitettu funktio on Riemann-integroituva. Lauseen todistus ohitetaan tällä kurssilla, mutta se löytyy esimerkiksi Tero Kilpeläisen Mitta- ja integraaliteorian luentomonisteesta sivuilta 46–47.

Lause 9.5 (Lebesguen ehto)**.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Tällöin f on Riemann-integroituva jos ja vain jos f on jatkuva melkein kaikissa pisteissä $x \in [a,b]$ eli funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen.*

Tässä Mitta- ja integraaliteoria 1 -kurssin viimeisessä luvussa mainitaan muutamia Lebesguen integraaliin liittyviä asioita, joista on hyvä olla tietoinen, mutta joiden yksityiskohtiin palataan tarkemmin kurssilla MIT 2.

10.1. **Fubinin lause, osa 1**

Fubinin lauseet liittyvät tilanteisiin, joissa n-ulotteinen integraali voidaan jakaa peräkkäisiksi k- ja ℓ-ulotteisiksi integraaleiksi, missä $n = k + \ell$. Ensimmäinen versio lauseesta käsittelee ei-negatiivisia funktioita.

Lause 10.1 (Fubini ei-negatiivisille funktioille)**.** *Olkoon $n = k + \ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, ja merkitään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Oletetaan lisäksi, että $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ on mitallinen. Tällöin pätee, että*

(i) *funktio $y \mapsto f(y, z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen melkein kaikille $z \in \mathbb{R}^\ell$ (m_ℓ-m.k.),*

(ii) *funktio $z \mapsto f(y, z)$ on $\mathcal{M}_\ell$-mitallinen melkein kaikille $y \in \mathbb{R}^k$ (m_k-m.k.),*

(iii) *funktio $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)$ on $\mathcal{M}_\ell$-mitallinen,*

(iv) *funktio $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_\ell(z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen, ja*

(v) *integrointi voidaan tehdä osissa eikä järjestyksellä ole merkitystä eli*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^\ell} f(y, z)\, dm_\ell(z)\, dm_k(y).\end{aligned}$$

Fubinin lauseesta saadaan versio myös Lebesgue-integroituville funktioille.

Lause 10.2 (Fubini integroituville funktioille)**.** *Olkoon $n = k + \ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, ja merkitään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Oletetaan lisäksi, että $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Tällöin pätee, että*

(i) *funktio $y \mapsto f(y, z)$ on joukossa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$ melkein kaikille $z \in \mathbb{R}^\ell$ (m_ℓ-m.k.),*

(ii) *funktio $z \mapsto f(y, z)$ on joukossa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell)$ melkein kaikille $y \in \mathbb{R}^k$ (m_k-m.k.),*

(iii) *funktio $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)$ on joukossa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\ell)$,*

(iv) *funktio $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_\ell(z)$ on joukossa $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$, ja*

(v) *integrointi voidaan tehdä osissa eikä järjestyksellä ole merkitystä eli*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^\ell} f(y, z)\, dm_\ell(z)\, dm_k(y).\end{aligned}$$

Todistus. Fubinin lauseiden todistukset esitetään kurssilla MIT 2; katso Luku 17 □

Fubinin lauseiden 10.1 ja 10.2 avulla useampiulotteisten Lebesgue-integraalien laskeminen voidaan siis periaatteessa aina palauttaa yksiulotteisten integraalien laskemiseksi (tapaus $k = 1$ ja iteraatio). Yksiulotteiset integraalit voidaan puolestaan usein laskea joko Riemann-integraaleina Lauseen 9.2 avulla tai Analyysin peruslausetta käyttäen (katso Lause 10.5); aina tämä ei kuitenkaan onnistu täsmällisesti alkeisfunktioiden avulla.

Perustellaan esimerkkinä Fubinin lauseen käytöstä niin sanotun *Cavalierin kaavan* (26) paikkaansapitävyys.

Lause 10.3. *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin*

$$\int_A f\,dm = \int_{[0,\infty[} m_n(\{x \in A : f(x) > t\})\,dt. \tag{26}$$

Todistus. (Idea:) Määritellään funktio $g\colon A \times [0,\infty[\to [0,\infty[$,

$$g(x,t) = \chi_{[0,f(x)[}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } t < f(x) \\ 0, & \text{jos } t \geq f(x). \end{cases}$$

Tällöin g on mitallinen (avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ mitallisuuden mielessä). Mitallisuuden todistus sivuutetaan, mutta tähän palataan MIT 2 -kurssilla. Koska kaikille $x \in A$ pätee

$$f(x) = \int_{[0,f(x)[} 1\,dm_1(t) = \int_{[0,\infty[} g(x,t)\,dm_1(t),$$

saadaan Fubinin lauseen 10.1 nojalla

$$\begin{aligned} \int_A f\,dm &= \int_A f(x)\,dm_n(x) = \int_A \int_{[0,\infty[} g(x,t)\,dm_1(t)\,dm(x) \\ &\overset{(\text{L.}10.1)}{=} \int_{[0,\infty[} \underbrace{\int_A g(x,t)\,dm(x)}_{=m_n(\{x\in A : f(x)>t\})}\,dm_1(t) = \int_{[0,\infty[} m_n(\{x \in A : f(x) > t\})\,dt, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu. □

10.2. **Absoluuttisesti jatkuvat funktiot**

Absoluuttisesti jatkuvat funktiot tarjoavat vastauksen kysymykseen ”Mille funktioille pätee Analyysin peruslause?”.

Määritelmä 10.4. Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on **absoluuttisesti jatkuva**, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\sum_{j=1}^{k} \left| f(b_j) - f(a_j) \right| < \varepsilon$$

aina, kun välit $]a_j, b_j[\subset [a,b]$ ovat erillisiä ja $\sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta$.

Huomautus. (a) Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, on f myös *tasaisesti* jatkuva; tasainen jatkuvuus on itse asiassa yhtäpitävää sen kanssa, että absoluuttisen jatkuvuuden ehto pätee aina tapauksessa $k = 1$.

(b) Kaikki tasaisesti jatkuvat funktiot eivät kuitenkaan ole absoluuttisesti jatkuvia. Tällainen on esimerkiksi Esimerkin 10.6 *Cantorin funktio*.

(c) Jos funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on *Lipschitz-jatkuva*, niin f on absoluuttisesti jatkuva; perustelu on harjoitustehtävä.

Muista, että funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa luku $0 < L < \infty$ siten, että $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikille $x, y \in A$.

Lause 10.5. *Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva jos ja vain jos f on derivoituva m.k. $x \in [a,b]$, $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ ja*

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'\,dm \qquad \textit{kaikille } x \in [a,b]. \tag{27}$$

Todistus. "$\Rightarrow$" Tämä suunta vaatii aika paljon työtä, joka menee yli tämän kurssin asioiden, joten se ohitetaan kokonaan; katso esimerkiksi [StSha, §3.3] tai [BBT, Chapter 7].

"$\Leftarrow$" Jos $I =]a_j, b_j[\subset [a,b]$, niin kaavan (27) ja integraalin additiivisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned} |f(b_j) - f(a_j)| &= \big|f(b_j) - f(a) - \big(f(a_j) - f(a)\big)\big| \\ &= \left|\int_{[a,b_j]} f'\,dm - \int_{[a,a_j]} f'\,dm\right| = \left|\int_{]a_j,b_j]} f'\,dm\right| = \left|\int_I f'\,dm\right|. \end{aligned}$$

Tehdään nyt antiteesi, että f ei olekaan absoluuttisesti jatkuva. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikille $N \in \mathbb{N}$ on olemassa erilliset avoimet välit $I_{j,N} =]a_j, b_j[\subset [a,b]$, $j = 1, 2, \ldots, k$ joille $m\big(\bigcup_{j=1}^k I_{j,N}\big) < 2^{-N}$, mutta

$$\sum_{j=1}^k \left|\int_{I_{j,N}} f'\,dm\right| = \sum_{j=1}^k |f(b_j) - f(a_j)| \ge \varepsilon. \tag{28}$$

Merkitään $E_N = \bigcup_{j=1}^k I_{j,N}$ ja määritellään $B_M = \bigcup_{N=M}^\infty E_N$, jolloin joukot E_N ja B_M ovat mitalisia, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ sekä $B_M \subset E_M$ kaikille $M \in \mathbb{N}$. Lisäksi mitan subadditiivisuuden ja geometrisen summan kaavan perusteella

$$m(B_M) \le \sum_{N=M}^\infty m(E_N) < \sum_{N=M}^\infty 2^{-N} = 2^{1-M} \xrightarrow{M\to\infty} 0. \tag{29}$$

Asetetaan $g_M(x) = |f'(x)|\chi_{B_M}(x)$ kaikille $x \in [a,b]$. Tällöin $|g_M(x)| \le |f'(x)|$ kaikille $x \in [a,b]$ ja kaikille $M \in \mathbb{N}$. Kaavasta (29) ja joukkojen B_M sisäkkäisyydestä seuraa, että $\lim_{M\to\infty} g_M(x) = 0$ m.k. $x \in [a,b]$. Siten funktioihin g_M voidaan soveltaa DK-lausetta 8.9, ja tästä yhdessä antiteesista saadun kaavan (28), kolmioepäyhtälön (Lause 8.7 (b)) sekä välien $I_{j,N}$ erillisyyden nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\le \sum_{j=1}^k \left|\int_{I_{j,N}} f'\,dm\right| \le \sum_{j=1}^k \int_{I_{j,N}} |f'|\,dm \\ &= \int_{E_N} |f'|\,dm \le \int_{B_N} |f'|\,dm = \int_{[a,b]} g_N\,dm \xrightarrow[\text{(DK)}]{N\to\infty} 0, \end{aligned}$$

mikä on selvästi ristiriitaista. Näin ollen funktion f täytyy olla absoluuttisesti jatkuva. $\square$

MIT 2 -kurssin Luvussa 15 palataan absoluuttiseen jatkuvuuteen vielä yleisemmällä tasolla ja kirjoitetaan esimerkiksi Lausen 10.5 suunnan "$\Leftarrow$" todistus uudelleen käyttäen apuna mittojen absoluuttista jatkuvuutta.

Annetaan vielä esimerkki funktiosta $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on (tasaisesti) jatkuva ja jolla on melkein kaikkialla määritelty Lebesgue-integroituva derivaattafunktio $f'\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, mutta jolle Analyysin peruslause ei päde. Lauseen 10.5 mukaan tällainen funktio ei siis voi olla absoluuttisesti jatkuva.

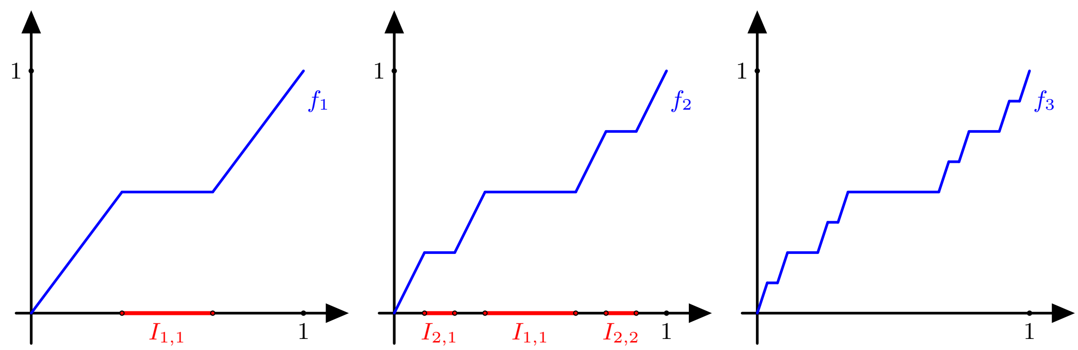
Esimerkki 10.6 (Cantorin funktio eli "paholaisen portaat")**.** Cantorin funktion konstruktiossa käytetään apuna Esimerkistä 3.3 tuttua Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoa $C \subset [0,1]$.

Olkoot $I_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$, joukon $C \subset [0,1]$ konstruktion vaiheessa k *poistetut* avoimet välit, indeksin j mukaan järjestyksessä vasemmalta oikealle, jolloin siis $I_{1,1} =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, $I_{2,1} =]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$, $I_{2,2} =]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ ja niin edelleen. Määritellään funktiot $f_k\colon [0,1] \to [0,1]$ siten, että

(i) $f_k(0) = 0$ ja $f_k(1) = 1$ kaikille $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $f_k(x) = \dfrac{2i-1}{2^j}$, kun $x \in I_{j,i}$ joillekin $j \leq k$ ja $i = 1, 2, \ldots, 2^{j-1}$,

(iii) välien $I_{j,i}$, $j \leq k$, ulkopuolella funktion f_k kuvaaja koostuu janoista, jotka yhdistävät välien $I_{j,i}$ kuvajoukot niin että funktiosta f_k tulee kasvava ja jatkuva koko välillä $[0,1]$.



Näin saadaan jatkuvat funktiot $f_k\colon [0,1] \to [0,1]$, joille pätee

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| < 2^{-(k+1)} \quad \text{kaikille } x \in [0,1] \text{ ja kaikille } k \in \mathbb{N}.$$

Tällöin on olemassa jatkuva funktio $f\colon [0,1] \to [0,1]$ siten, että $f_k \to f$ tasaisesti joukossa $[0,1]$, kun $k \to \infty$; tämän perustelu on harjoitustehtävä. Funktio f on haluttu Cantorin funktio ja sen kuvajoukkoa kutsutaan joskus *paholaisen portaiksi.* Funktiolla $f\colon [0,1] \to [0,1]$ on seuraavat ominaisuudet:

- f on kasvava ja jatkuva. (Itse asiassa f on jopa tasaisesti jatkuva, koska kaikki suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuvat funktiot ovat tasaisesti jatkuvia.)

- f on derivoituva kaikissa pisteissä $x \in [0,1] \setminus C$ ja $f'(x) = 0$ kaikille $x \in [0,1] \setminus C$. Tämä seuraa siitä, että nämä pisteet kuuluvat avoimien välien $I_{k,i}$ yhdisteeseen, ja f on vakiofunktio jokaisella avoimella välillä $I_{k,i}$.
- Koska $m(C) = 0$, on siis $f'(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Tällöin f' on Lebesgue-integroituva ja $\int_{[0,1]} f' \, dm = 0$.
- Koska $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$, niin edellisten kohtien perusteella
$$f(1) - f(0) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f' \, dm.$$
Siten Analyysin peruslause (27) **ei ole** voimassa funktiolle f.

Mitta- ja integraaliteoria 2 (mats112)

11. Yleiset mitat ja mitta-avaruudet

Lebesguen mitta m_n on avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen "tilavuusmitta", mutta on toki olemassa monia muitakin tapoja *mitata* joukkojen $A \subset \mathbb{R}^n$ kokoa. Vastaavasti jos X on mikä tahansa joukko, on usein tarpeellista tutkia osajoukkojen $A \subset X$ kokoa, ja tätä kautta on päädytty yleisten mittojen määritelmään (katso Määritelmä 11.8). Ideana on vaatia, että mitta toteuttaa Lebesguen mitan keskeisimmät perusominaisuudet, joiden pohjalta mitoille voidaan sitten todistaa muita haluttuja ominaisuuksia.

Kuten jo Lebesguen mitan yhteydessä huomattiin, ei mitan määrittely kuitenkaan välttämättä onnistu kaikille joukoille $A \subset X$ niin, että halutut ominaisuudet (erityisesti additiivisuus) olisivat aina voimassa. Tätä varten myös yleisten mittojen tapauksessa tarkastelut rajoitetaan sopiviin avaruuden X osajoukkojen kokoelmiin eli σ-algebroihin.

11.1. **Sigma-algebrat**

Muista, että joukon X *potenssijoukko* $\mathcal{P}(X)$ on kaikkien joukon X osajoukkojen kokoelma eli $\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\}$. Joukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukkoja (eli joukkojen $E \subset X$ kokoelmia) kutsutaan usein *joukkoperheiksi.*

Määritelmä 11.1. Olkoon X joukko. Tällöin $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on **σ-algebra** [sigma-algebra] joukossa X, jos Γ toteuttaa seuraavat ominaisuudet:

(i) $\emptyset \in \Gamma$,

(ii) jos $A \in \Gamma$, niin $A^c = X \setminus A \in \Gamma$,

(iii) jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$, niin $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \Gamma$.

(Jos ehto (iii) pätee vain äärellisille yhdisteille, on Γ *algebra*.)

Huomautus. Oletetaan, että Γ on σ-algebra joukossa X. Tällöin

(a) ominaisuuksien (i) ja (ii) perusteella myös $X \in \Gamma$.

(b) jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$, niin myös $\bigcap_{j=1}^\infty A_j \in \Gamma$ (DeMorgan).

(c) jos $A, B \in \Gamma$, niin myös $A \setminus B \in \Gamma$.

Esimerkki 11.2. (a) $\Gamma = \{X, \emptyset\}$ on suppein mahdollinen σ-algebra joukossa X (niin sanottu triviaali σ-algebra).

(b) $\Gamma = \mathcal{P}(X)$ on laajin mahdollinen σ-algebra joukossa X.

(c) Jos $A \subset X$, niin $\Gamma = \{X, \emptyset, A, A^c\}$ on σ-algebra.

(d) $\Gamma = \mathcal{M}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}$ on σ-algebra joukossa $\mathbb{R}^n$. Tämä seuraa Lemman 3.5 (a)-kohdasta, Lauseen 3.7 (a)-kohdasta sekä siitä, että $\emptyset \in \mathcal{M}_n$.

(e) $\Gamma = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on avoin tai suljettu}\}$ **ei ole** σ-algebra joukossa $\mathbb{R}^n$ (mieti!).

Kaikki σ-algebroiden leikkaukset ovat myös σ-algebroita:

Lause 11.3. *Olkoon I indeksijoukko. Oletetaan, että Γ_α on σ-algebra joukossa X kaikille $\alpha \in I$. Tällöin myös $\bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$ on σ-algebra joukossa X.*

Todistus. (i) Koska $\emptyset \in \Gamma_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$, niin myös $\emptyset \in \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$.

(ii) Jos $A \in \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$ eli $A \in \Gamma_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$, niin myös $A^c \in \Gamma_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$. Siispä $A^c \in \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$.

(iii) Jos $A_1, A_2 \ldots \in \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$, niin $A_j \in \Gamma_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$ ja kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin myös $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$, joten $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{\alpha \in I} \Gamma_\alpha$.

$\square$

Määritelmä 11.4. Olkoon X joukko ja olkoon $\Delta \subset \mathcal{P}(X)$. Tällöin

$$\Gamma_\Delta = \bigcap \{\Gamma : \Gamma \text{ on } \sigma\text{-algebra joukossa } X \text{ ja } \Delta \subset \Gamma\}$$

on joukkoperheen Δ **virittämä** σ-algebra joukossa X.

Huomautus. (a) Γ_Δ on todella σ-algebra Lauseen 11.3 nojalla.

(b) Γ_Δ on selvästi suppein joukon X σ-algebra, joka sisältää joukkoperheen Δ. Toisin sanoen, jos $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra ja $\Delta \subset \Gamma$, niin määritelmän mukaan $\Gamma_\Delta \subset \Gamma$.

Esimerkki 11.5. Olkoon $A \subset X$. Jos $\Delta = \{A\}$, niin $\Gamma_\Delta = \{X, \emptyset, A, A^c\}$.

Määritelmä 11.6 (Borel-joukot)**.** Olkoon

$$\Delta = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on avoin joukko}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Tällöin σ-algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n := \Gamma_\Delta$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *Borelin σ-algebra* ja joukkoja $A \in \mathcal{B}_n$ kutsutaan *Borel-joukoiksi.*

Koska Lauseen 3.15 perusteella $\Delta \subset \mathcal{M}_n$ ja lisäksi tiedetään, että $\mathcal{M}_n$ on σ-algebra joukossa $\mathbb{R}^n$, niin tällöin joukon $\mathcal{B}_n$ määritelmän perusteella pätee $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$. Toisin sanoen, kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukot ovat Lebesgue-mitallisia. Käänteinen suunta ei päde, sillä on olemassa Lebesgue-mitallisia joukkoja, jotka eivät ole Borel-joukkoja (harjoitustehtävä).

Borel-joukkoja ovat luonnollisesti kaikki avoimet ja suljetut joukot, sekä esimerkiksi joukot

- $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, missä $G_i \subset \mathbb{R}^n$ on avoin kaikille $i \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{G}_\delta$-joukot)
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, missä $F_i \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu kaikille $i \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{F}_\sigma$-joukot)
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{G}_i$, missä $\widetilde{G}_i \in \mathcal{G}_\delta$ kaikille $i \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{G}_{\delta\sigma}$-joukot)
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} \widetilde{F}_i$, missä $\widetilde{F}_i \in \mathcal{F}_\sigma$ kaikille $i \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-joukot)
- ja niin edelleen...

Esimerkiksi $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}$ ei ole avoin eikä suljettu, mutta $\mathbb{Q}$ on $\mathcal{F}_\sigma$-joukko ja siten Borel-joukko.

***Huomautus 11.7.** Edellä käytetyt merkinnät ovat melko standardeja. Eräs selitys näille on, että G tule saksan kielen sanasta *Gebiet* (alue, joka viittaa yleensä avoimuuteen) ja F ranskan kielen sanasta *fermé* (suljettu). Yhdisteelle käytetty σ (eli 's') puolestaan juontuisi summauksesta (saksan *Summe*) ja leikkausten δ (eli 'd') saksan kielen sanasta *Durchschnitt* (leikkaus).

11.2. **Mitat**

Voimme nyt esittää abstraktin mitan määritelmän; vertaa tätä Lauseeseen 4.2. On luontevaa vaatia, että mitan määritelyjoukko on σ-algebra, jotta mitallisten joukkojen yhdisteet ovat myös mitallisia. Ilman tätä tietoa määritelmän (ii)-kohta ei ole edes järkevä.

Määritelmä 11.8. Oletetaan, että X on joukko ja Γ on σ-algebra joukossa X.

(a) Funktio $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ on **mitta** (joukossa X tai σ-algebrassa Γ) jos seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

 (i) $\mu(\emptyset) = 0$.

 (ii) Jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ ovat erillisiä eli $A_j \cap A_i = \emptyset$ aina kun $j \neq i$, niin

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j). \qquad \text{(numeroituva (σ-)additiivisuus)}$$

(b) Tällöin kolmikkoa (X, Γ, μ) sanotaan **mitta-avaruudeksi** ja joukkoja $A \in \Gamma$ sanotaan (Γ-)mitallisiksi.

(c) Mitta μ on
- *äärellinen*, jos $\mu(X) < \infty$;
- *todennäköisyysmitta*, jos $\mu(X) = 1$;
- *σ-äärellinen*, jos on joukot $E_j \in \Gamma$ siten, että $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ja $\mu(E_j) < \infty$ kaikille $j \in \mathbb{N}$.

Huomautus. Jos $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \Gamma$ ovat erillisiä, niin valitsemalla $A_j = \emptyset$ kaikille $j \geq N+1$ nähdään, että

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j).$$

Mitalle μ pätee siis myös *äärellinen additiivisuus*.

Esimerkki 11.9. (a) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$ on mitta-avaruus kaikille $n \in \mathbb{N}$; tämä seuraa MIT 1 -kurssin tutuista tuloksista. Lebesguen mitta m_n ei ole äärellinen, mutta se on σ-äärellinen: Esimerkiksi $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(0,j)$ ja $m(B(0,j)) < \infty$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, koska nämä joukot ovat rajoitettuja.

(b) Olkoon X joukko ja olkoon $a \in X$. Määritellään joukkofunktio $\delta_a\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ asettamalla

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \in A \\ 0, & \text{jos } a \notin A. \end{cases}$$

Tällöin $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ on mitta-avaruus (harjoitustehtävä). Mitta δ_a on niin sanottu *Diracin (delta)mitta* pisteessä $a \in A$. (Huomaa, että δ_a on todennäköisyysmitta.)

(c) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ Lebesgue-mitallinen funktio. Määritellään kaikille $A \in \mathcal{M}_n$, että

$$\mu(A) = \int_A f\,dm \quad (\geq 0).$$

Tällöin $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu)$ on mitta-avaruus: $\mu(\emptyset) = 0$ on selvä ja additiivisuus pätee Lauseen 7.10 (b)-kohdan nojalla. Jos lisäksi pätee, että $f(x) < \infty$ melkein kaikille $x \in \mathbb{R}$, niin mitta μ on σ-äärellinen, ja jos $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, niin mitta μ on äärellinen.

(On myös hyvä ja syvällinen kysymys, että mitkä kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitat saadaan esitettyä tähän tapaan integraalin avulla. Tätä pohditaan hieman tarkemmin Luvussa 15)

(d) Olkoon X joukko. Määritellään $\#\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ asettamalla kaikille $A \subset X$, että

$$\#(A) = \text{joukon } A \text{ alkioiden lukumäärä.}$$

Tällöin $(X, \mathcal{P}(X), \#)$ on mitta-avaruus ja $\#$ on niin sanottu *lukumäärämitta.*

Todistetaan yleisille mitoille perusominaisuuksia, jotka ovat tuttuja Lebesguen mitan yhteydestä. Huomaa, että emme tarvitse näiden ominaisuuksien todistuksissa mitään muuta, kuin tietoa mitan additiivisuudesta (ja mahdollisesti lauseen aiempia kohtia).

Lause 11.10. *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja olkoot $A, B \in \Gamma$ sekä $A_j \in \Gamma$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee:*

(a) *Jos $A \subset B$, niin $\mu(A) \leq \mu(B)$.* (monotonisuus)

(b) *Jos $A \subset B$ ja $\mu(A) < \infty$, niin $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(c) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. (subadditivisuus)

(d) *Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, niin* $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(e) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ *ja lisäksi* $\mu(A_1) < \infty$, *niin* $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

Todistus. (a) Koska $B = A \cup (B \setminus A)$ ja $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, niin mitan μ additivisuuden ja ei-negatiivisuuden nojalla

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A). \tag{30}$$

(b) Jos $\mu(A) < \infty$, voidaan se vähentää puolittain kaavan (30) ensimmäisestä yhtäsuuruudesta, jolloin saadaan $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$.

(c) Määritellään $B_1 = A_1$ ja asetetaan $B_j = A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ kun $j \geq 2$. Tällöin $B_j \in \Gamma$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Lisäksi joukot B_j ovat erillisiä, sillä jos $j_1 < j_2$, niin $B_{j_1} \subset A_{j_1}$ ja siten $B_{j_2} \cap B_{j_1} = \emptyset$. Siten σ-additiivisuuden ja monotonisuuden nojalla

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \overset{(B_j \subset A_j)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

kuten haluttiin.

(d) Tämä todistetaan kuten Lauseen 4.6 (b)-kohta Lebesguen mitalle. Huomaa, että tässä tarvitaan vain mitan σ-additiivisuutta sekä Lauseen 11.10 (b)-kohtaa.

(e) Tämä on puolestaan aivan vastaava kuin Lauseen 4.6 (c)-kohta; yksityiskohtien tarkastaminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

Tästä voisimme jatkaa kohti integraalin määritelmää mitta-avaruudessa (X, Γ, μ), aivan kuten tapauksessa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$. Nyt yksinkertaiset funktiot ovat muotoa $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}(x)$, missä $a_1, a_2, \dots, a_M \in \mathbb{R}$ ja $A_1, A_2, \dots, A_N \in \Gamma$. Vastaavasti funktio $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on (Γ-)mitallinen, jos

$$f^{-1}(]a, \infty]) = \{x \in A : f(x) > a\} \in \Gamma \qquad \text{kaikille } a \in \mathbb{R}.$$

Näiden määritelmien pohjalta suuri osa MIT 1 -kurssin Lukujen 5–8 asioista voidaan yleistää suoraviivaisesti vain vaihtamalla $\mathbb{R}^n \leftrightarrow X$, $\mathcal{M}_n \leftrightarrow \Gamma$ ja $m_n \leftrightarrow \mu$.

Integraalien määrittelyyn ja ominaisuuksin syvennytään tarkemmin kurssin jälkimmäisellä puoliskolla (katso Luku 14) ja toistaiseksi jatkamme yleisiin mittoihin liittyvän teorian parissa.

Määritelmä 11.11. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Joukko $E \in \Gamma$ on **nollamittainen**, jos $\mu(E) = 0$. Mitta-avaruus (X, Γ, μ) (tai lyhyesti mitta μ) on **täydellinen**, jos kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia; toisin sanoen, jos $\mu(E) = 0$ ja $N \subset E$, niin $N \in \Gamma$. (Huomaa, että tällöin monotonisuuden nojalla tietysti myös $\mu(N) = 0$.)

Täydellisyys on hyödyllinen ominaisuus, koska se takaa, että nollamittaisten joukkojen osajoukot voidaan aina unohtaa mittoja (ja myöhemmin integraaleja) laskettaessa.

Esimerkki 11.12. (a) Olkoon $\Gamma = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ ja olkoon $\mu(A) = 0$ kaikille $A \in \Gamma$ Tällöin $(\mathbb{R}, \Gamma, \mu)$ ei ole täydellinen, koska esimerkiksi $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ja $\mu(\mathbb{R}) = 0$, mutta $[0, 1] \notin \Gamma$.

(b) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$ on täydellinen. Tämä seuraa siitä, että jos $m_n(E) = 0$ ja $N \subset E$, on $m^*(N) \leq m^*(E) = m(E) = 0$. Siispä myös $N \in \mathcal{M}_n$ Lauseen 3.2 perusteella.

(c) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, m_n)$ ei ole täydellinen (harjoitustehtävä).

Huomautus. Mitta-avaruuden (X, Γ, μ) täydellisyys riippuu siis oleelliseti σ-algebrasta Γ, ei niinkään mitasta μ. Jokainen mitta-avaruus voidaankin täydentää täydelliseksi pienellä σ-algebran laajennuksella, kuten seuraavassa lauseessa tehdään.

Lause 11.13. *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Määritellään*

$$\widetilde{\Gamma} = \{A \cup N : A \in \Gamma \text{ ja on } E \in \Gamma \text{ siten, että } N \subset E \text{ ja } \mu(E) = 0\}$$

sekä $\widetilde{\mu} \colon \widetilde{\Gamma} \to [0, \infty]$, $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. Tällöin $(X, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\mu})$ on täydellinen mitta-avaruus ja $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$.

Mitta-avaruutta $(X, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\mu})$ sanotaan mitta-avaruuden (X, Γ, μ) *täydellistymäksi.*

Todistus. **(1)** $\widetilde{\Gamma}$ on todella σ-algebra; tämä on harjoitustehtävä.

(2) $\widetilde{\mu}$ on hyvin määritelty: Olkoot $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \widetilde{\Gamma}$, missä siis $A_i \in \Gamma$ ja $N_i \subset E_i \in \Gamma$, $\mu(E_i) = 0$, kun $i = 1, 2$. Tällöin funktion $\widetilde{\mu}$ määritelmän sekä mitan μ monotonisuuden ($A_1 \subset A_2 \cup E_2$) ja subadditiivisuuden perusteella

$$\widetilde{\mu}(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup E_2) \leq \mu(A_2) + \mu(E_2) = \mu(A_2) = \widetilde{\mu}(A_2 \cup N_2).$$

Aivan vastaavasti saadaan, että $\widetilde{\mu}(A_2 \cup N_2) \leq \widetilde{\mu}(A_1 \cup N_1)$, joten todella $\widetilde{\mu}(A_1 \cup N_1) = \widetilde{\mu}(A_2 \cup N_2)$.

(3) Kun $A \in \Gamma$, on $A = A \cup \emptyset \in \widetilde{\Gamma}$, ja tällöin $\widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(A \cup \emptyset) = \mu(A)$, kuten haluttiin.

(4) $\widetilde{\mu}$ on mitta:

(i) Koska $\emptyset \in \Gamma$, niin kohdan **(3)** nojalla $\widetilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
(ii) Jos $A_j \cup N_j \in \widetilde{\Gamma}$ ovat erillisiä, niin tietysti myös $A_j \in \Gamma$ ovat erillisiä. Toisaalta joukoille N_j pätee, että $\bigcup_{j=1}^\infty N_j \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \Gamma$, missä $\mu\big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\big) = 0$. Siten funktion $\widetilde{\mu}$ määritelmän ja mitan μ additiiviisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_j \cup N_j)\right) &= \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j \cup \bigcup_{j=1}^\infty N_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \widetilde{\mu}(A_j \cup N_j).\end{aligned}$$

(5) $\widetilde{\mu}$ on täydellinen: Oletetaan, että $A \cup N \in \widetilde{\Gamma}$, missä $N \subset E \in \Gamma$ ja $\mu(E) = 0$, ja että $\widetilde{\mu}(A \cup N) = 0$. Olkoon $B \subset A \cup N$. Koska $\mu(A) = \widetilde{\mu}(A \cup N) = 0$, niin erityisesti tällöin $B \subset A \cup E$, missä $\mu(A \cup E) \leq \mu(A) + \mu(E) = 0$. Näin ollen mitan $\widetilde{\mu}$ määritelmän mukaan (koska $\emptyset \in \Gamma$)

$$\widetilde{\mu}(B) = \widetilde{\mu}(\emptyset \cup B) = \mu(\emptyset) = 0,$$

mikä pitikin osoittaa. $\square$

***Huomautus 11.14.** Yleisten mittojen Määritelmässä 11.8 vaaditaan, että $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ eli $\mu(A) \geq 0$ kaikille $A \in \Gamma$. Joskus on kuitenkin tarpeen tutkia myös vastaavia joukkofunktioita, jotka saavat myös negatiivisia arvoja; nämä ovat niin sanottuja *merkkimittoja*. Merkkimitta ν on siis joukkofunktio $\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$, joka toteuttaa Määritelmän 11.8 (a)-kohdan ehdot (i) ja (ii). Lisäksi pitää vaatia, että ν ei voi saada molempia arvoista ∞ ja $-\infty$, jotta summat on aina hyvin määritelty.

Merkkimitoilla on paljon samoja ominaisuuksia kuin mitoilla, mutta ne *eivät* ole (yleensä) monotonisia eivätkä subadditiivisia. Voidaan osoittaa, että jokainen merkkimitta $\nu\colon \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ on mahdollista esittää kahden mitan erotuksena eli on olemassa mitat $\nu^{\pm}\colon \Gamma \to [0,\infty]$ siten, että $\nu(A) = \nu^{+}(A) - \nu^{-}(A)$ kaikille $A \in \Gamma$. Huomaa, että tällöin ainakin toinen mitoista $\nu^{\pm}$ on äärellinen.

Esimerkiksi jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on Lebesgue-integroituva ja kaikille $A \in \mathcal{M}_n$ määritellään, että

$$\nu(A) = \int_A f\,dm,$$

saadaan merkkimitta $\nu\colon \mathcal{M}_n \to [0,\infty]$; selvästi $\mu(\emptyset) = 0$ ja additiivisuus pätee Lauseen 8.3 perusteella (vertaa Esimerkin 11.9 (c)-kohtaan).

Yleisten ulkomittojen periaate on sama, kuin MIT 1 -kurssilla Lebesguen ulkomitan tapauksessa: Ulkomitta μ^* on määritelty kaikille joukoille $A \subset X$, mutta ulkomitoilla on heikommat ominaisuudet kuin mitoilla; erityisesti additiivisuus ei aina toimi kaikille erillisille joukoille. Jos kuitenkin rajoitutaan vain ulkomitan μ^* suhteen mitallisiin joukkoihin (Määritelmä 12.3), saadaan aikaan mitta.

Eräs ulkomittojen hyvä puoli on, että niitä saadaan määriteltyä luonnollisten peitekonstruktioiden avulla (Kappale 12.2). Esimerkkejä näin saatavista ulkomitoista ovat Lebesguen ulkomitta sekä Hausdorffin sisällöt, joihin tutustutaan Kappaleessa 13.2.

12.1. **Ulkomitat ja mitallisuus**

Lähdetään liikkeelle yleisen ulkomitan määritelmästä; vertaa tätä Lauseeseen 2.4.

Määritelmä 12.1. Olkoon X joukko. Funktio $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on **ulkomitta** (joukossa X), jos pätee

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Jos $A \subset B \subset X$, niin $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. (monotonisuus)

(iii) Jos $A_1, A_2, \ldots \subset X$, niin
$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \qquad ((\sigma\text{-})\text{subadditiivisuus})$$

Esimerkki 12.2. (a) Lebesguen ulkomitta m_n^* on ulkomitta joukossa $\mathbb{R}^n$. Tämä seuraa suoraan Lauseesta 2.4.

(b) Jos $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ on mitta-avaruus, niin μ on ulkomitta joukossa X. Tämä seuraa siitä, että $\mu(\emptyset) = 0$, sekä Lauseen 11.10 (a)- ja (c)-kohdista. Siten esimerkiksi δ_a ja $\#$ ovat myös ulkomittoja joukossa X. (Huomaa, että mitan μ määrittelyjoukon täytyy tässä olla koko $\mathcal{P}(X)$.)

(c) Olkoon X joukko ja olkoon $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$,
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{jos } A = \emptyset \\ 1, & \text{jos } A \ne \emptyset. \end{cases}$$
Tällöin μ^* on ulkomitta joukossa X, niin sanottu *diskreetti ulkomitta*.

Ulkomitan μ^* avulla voidaan muodostaa μ^*-mitallisten joukkojen σ-algebra, johon rajoitettuna μ^* on mitta. Mitallisuus määritellään aivan samoin, kuin Lebesguen ulkomitan tapauksessa eli Carathéodoryn ehdon (31) avulla.

Määritelmä 12.3. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Joukko $A \subset X$ on **μ^*-mitallinen**, jos kaikille joukoille $E \subset X$ pätee
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{31}$$

(Muista, että $E \cap A^c = E \setminus A$ ja että ehdossa (31) suunta "$\leq$" on aina voimassa ulkomitan subadditiivisuuden nojalla.)

Kaikkien μ^*-mitallisten joukkojen kokoelmaa merkitään

$$\Gamma_{\mu^*} = \{A \subset X : A \text{ on } \mu^*\text{-mitallinen}\}.$$

Esimerkki 12.4. (a) Muista, että m_n^*-mitallisia (eli Lebesgue-mitallisia) joukkoja on todella paljon, sillä erityisesti kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukot ovat m_n^*-mitallisia (Lause 3.15 ja Huomautus 3.17). Toisaalta on myös joukkoja, jotka eivät ole m_n^*-mitallisia, mutta näiden konstruointi on hieman mutkikasta ja vaatii valinta-aksiooman käyttöä (Lause 3.10).

(b) Aina mitallisia joukkoja ei ole paljon: Olkoon $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ joukon X diskreetti ulkomitta. Tällöin ainoat μ^*-mitalliset joukot ovat X ja $\emptyset$ (harjoitustehtävä). Itse asiassa X ja $\emptyset$ ovat mitallisia kaikkien joukon X ulkomittojen suhteen, mutta muita mitallisia joukkoja ei siis välttämättä olekaan.

Lause 12.5. *Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Tällöin μ^*-mitallisten joukkojen kokoelma Γ_{μ^*} on σ-algebra joukossa X. Lisäksi ulkomitan μ^* rajoittuma σ-algebraan Γ_{μ^*} eli funktio*

$$\mu = \mu^*|_{\Gamma_{\mu^*}} \colon \Gamma_{\mu^*} \to [0, \infty], \;\; \mu(A) = \mu^*(A) \quad \textit{kaikille } A \in \Gamma_{\mu^*},$$

on mitta σ-algebrassa Γ_{μ^*}. Toisin sanoen, (X, Γ_{μ^*}, μ) on mitta-avaruus.

Todistus. Todistus etenee oleellisesti samoin kuin Lebesguen (ulko)mitan tapauksessa, mutta kerrataan tässä vielä keskeiset vaiheet:

(1) On selvää, että $\emptyset \in \Gamma_{\mu^*}$, ja jos $A \in \Gamma_{\mu^*}$, niin suoraan ehdosta (31) nähdään, että myös $A^c \in \Gamma_{\mu^*}$.

(2) Jos $A, B \in \Gamma_{\mu^*}$, niin myös $A \cup B \in \Gamma_{\mu^*}$ ja $A \setminus B \in \Gamma_{\mu^*}$ (harjoitustehtävä).

(3) Jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma_{\mu^*}$, niin myös $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma_{\mu^*}$. Tämän kohdan todistus vaatii vähän työtä, mutta se on aivan sama kuin Lauseen 3.7 (a)-kohdan todistus:

Voidaan olettaa, että joukot A_j ovat erillisiä; muutoin siirrytään jälleen tutkimaan joukkoja $B_1 = A_1$ ja $B_j = A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$, $j \geq 2$, kuten Lauseiden 3.7 (a) ja 11.10 (c) todistuksissa. Olkoon $E \subset X$. Induktiolla voidaan osoittaa (vertaa Lauseen 3.7 (a) todistukseen), että kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \mu^*(E \cap A_j). \tag{32}$$

Huomaa, että joukot $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ ovat mitallisia (kohta **(2)** ja helppo induktio). Väitteen (32) induktioaskeleen todistuksessa hyödynnetään näiden joukkojen mitallisuutta ja käytetään ehdossa (31) testijoukkoja $E \cap \bigcup_{j=1}^{N+1} A_j$. Myös joukkojen A_j erillisyys on tarpeen.

Käyttämällä uudelleen joukon $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ mitallisuutta, nyt testijoukolle E, saadaan yhdessä kaavan (32) sekä ulkomitan μ^* monotonisuuden avulla, että kaikille $N \in \mathbb{N}$

pätee

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*\Big(E\cap\bigcup_{j=1}^N A_j\Big) + \mu^*\Big(E\setminus\bigcup_{j=1}^N A_j\Big)\\
&\geq \sum_{j=1}^N \mu^*(E\cap A_j) + \mu^*(E\setminus A).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Tässä monotonisuuden käyttö perustuu siihen, että $E\setminus\bigcup_{j=1}^N A_j \supset E\setminus A$ koska $\bigcup_{j=1}^N A_j\subset A$. Kun epäyhtälön (33) oikealla puolella annetaan $N\to\infty$ ja käytetään tämän jälkeen subadditiivisuutta, jonka mukaan $\sum_{j=1}^\infty \mu^*(E\cap A_j)\geq \mu^*(E\cap A)$, saadaan arvio

$$\mu^*(E)\geq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c).$$

Joukon A mitallisuus seuraa tästä.

Kohtien **(1)** ja **(3)** perusteella Γ_{μ^*} on todella σ-algebra.

(4) μ on mitta σ-algebrassa Γ_{μ^*}:

(i) On selvää, että $\mu(\emptyset)=0$.

(ii) Oletetaan sitten, että $A_1,A_2,\ldots\in\Gamma_{\mu^*}$ ovat erillisiä. Valitsemalla kaavassa (32) $E=X$, saadaan yhdessä ulkomitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden kanssa, että kaikille $N\in\mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{j=1}^N \mu^*(A_j) \overset{(32)}{=} \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^N A_j\Big)\leq \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)\leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j).$$

Kun vasemmalla puolella annetaan $N\to\infty$, nähdään, että

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)=\sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j),$$

kuten haluttiin.

Näin ollen μ on osoitettu mitaksi, ja koko väite on todistettu. □

Kaikki joukot, joiden ulkomitta on nolla, ovat mitallisia kyseisen ulkomitan suhteen.

Lause 12.6. *Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X. Jos $A\subset X$ ja $\mu^*(A)=0$, niin $A\in\Gamma_{\mu^*}$ eli A on μ^*-mitallinen.*

Todistus. Todistus on aivan sama, kuin Lebesguen ulkomitalle: Olkoon $E\subset X$. Koska $E\cap A\subset A$ ja $E\cap A^c\subset E$, saadaan ulkomitan monotonisuuden ja oletuksen $\mu^*(A)=0$ nojalla, että

$$\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\leq \mu^*(A)+\mu^*(E)=0+\mu^*(E)=\mu^*(E).$$

Koska epäyhtälö toiseen suuntaan pätee aina, on ehto (31) voimassa kaikille $E\subset X$, ja näin ollen joukko A on osoitettu μ^*-mitalliseksi. □

Lauseesta 12.6 seuraa, että ulkomitoista saatavat mitat ovat aina täydellisiä.

Lause 12.7. *Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja olkoon $\mu = \mu^*|_{\Gamma_{\mu^*}}$. Tällöin mitta-avaruus (X, Γ_{μ^*}, μ) on täydellinen.*

Todistus. Oletetaan siis, että $E \in \Gamma_{\mu^*}$ ja $\mu(E) = 0$, ja että $N \subset E$. Ulkomitan monotonisuuden nojalla $\mu^*(N) \leq \mu^*(E) = \mu(E) = 0$, joten $\mu^*(N) = 0$. Tällöin Lauseen 12.6 mukaan myös $N \in \Gamma_{\mu^*}$, mikä osoittaa halutun täydellisyyden. □

12.2. **Ulkomittojen konstruktioita**

Tässä kappaleessa esitellään muutamia yleisiä tapoja ulkomittojen konstruoimiseksi. Ensimmäinen tapa "kääntää" Lauseen 12.5 tilanteen, jossa ulkomitan μ^* avulla saatiin mitta μ mitallisten joukkojen σ-algebrassa Γ_{μ^*} — joka tosin voi olla pieni, vaikkapa vain $\{X, \emptyset\}$. Käänteiseen suuntaan pätee, että jos μ on mikä tahansa mitta σ-algebrassa $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, saadaan sen avulla määriteltyä ulkomitta μ^* joukkoon X.

Lause 12.8. *Oletetaan, että (X, Γ, μ) on mitta-avaruus. Tällöin on olemassa ulkomitta $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ siten, että jokainen $A \in \Gamma$ on μ^*-mitallinen ja $\mu^*(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$.*

Todistus. **(1)** Kun $A \subset X$, määritellään

$$\mu^*(A) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \Gamma \text{ ja } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\} \in [0, \infty].$$

Tällöin μ^* on ulkomitta joukossa X (harjoitustehtävä, joka on itse asiassa oleellisesti sama kuin alla olevan Lauseen 12.10 todistus; vertaa myös Lebesguen ulkomitan konstruktioon Luvussa 2).

(2) Olkoon sitten $A \in \Gamma$, ja oletetaan että joukot $E_i \in \Gamma$ peittävät joukon A eli $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tällöin mitan μ monotonisuuden ja subadditiivisuuden perusteella

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

joten ottamalla infimum yli kaikkien tällaisten joukon A peitteiden saadaan, että $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Toisaalta jos valitaan $E_1 = A$ ja $E_i = \emptyset$ kun $i \geq 2$, niin $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, ja siten $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(A)$. Siispä $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(3) Pitää vielä osoittaa, että jos $A \in \Gamma$, niin A on μ^*-mitallinen. Olkoon siis $E \subset X$ ja olkoot $E_i \in \Gamma$ siten, että $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tällöin ulkomitan μ^* monotonisuuden ja kohdan **(2)** perusteella

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leq \mu^*\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A}_{\in \Gamma}\Bigg) + \mu^*\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A^c}_{\in \Gamma}\Bigg) \\
&\overset{\mathbf{(2)}}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A^c\right) \\
&\overset{(*)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).
\end{aligned}$$

Huomaa, että kohdassa $(*)$ käytettiin mitan μ additiivisuutta erillisiin joukkoihin $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A$ ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A^c$ ja viimeinen arvio saadaan mitan subadditiivisuudesta. Kun otetaan jälleen infimum yli kaikkien tällaisten joukon E peitteiden, saadaan ulkomitan μ^* määritelmästä, että

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

ja siten joukko A on μ^*-mitallinen. □

Huomautus. (a) Joskus kaikkia monotonisia ja subadditiivisia joukkofunktioita $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, joille $\mu^*(\emptyset) = 0$, sanotaan mitoiksi. Tällöin pitää kuitenkin muistaa, että additiivisuus pätee vain μ^*-mitallisille erillisille joukoille.

(b) Lauseista 12.5 ja 12.8 huolimatta kaikkia mittoja ei saada esitettyä ulkomitan avulla. Yksi tällainen on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, m_n)$ eli Lebesguen mitan rajoittuma Borel-joukkoihin. Jos tähän mitta-avaruuteen sovelletaan Lausetta 12.8, saadaan ulkomitta m_n^* eli avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta (mieti!). Jos ulkomittaan m_n^* sovelletaan edelleen Lausetta 12.5, saadaan mitta-avaruus $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n) \neq (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, m_n)$.

(c) Meillä on nyt kaksi erilaista tapaa täydellistää mitta-avaruus (X, Γ, μ):

(1) Suoraan Lauseen 11.13 konstruktiolla, jolloin saadaan täydellinen mitta-avaruus $(X, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\mu})$.

(2) Lauseen 12.8 todistuksessa annetun konstruktion avulla. Tällöin saadaan ensin joukon X ulkomitta μ^*, joka voidaan puolestaan rajoittaa μ^*-mitallisiin joukkoihin mitaksi $\widehat{\mu} = \mu^*|_{\Gamma_{\mu^*}}$. Lauseen 12.8 mukaan $\Gamma \subset \Gamma_{\mu^*}$ ja $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$, joten $\widehat{\mu}$ on todella mitan μ laajennus. Lisäksi $\widehat{\mu}$ on täydellinen Lauseen 12.7 perusteella.

Voidaan osoittaa (katso [BBT, Section 2.13]), että jos mitta μ on σ-äärellinen, niin täydellistykset (1) ja (2) johtavat samaan lopputulokseen eli $(X, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\mu}) = (X, \Gamma_{\mu^*}, \widehat{\mu})$. Ilman σ-äärellisyysoletusta tämä yhtäsuuruus ei kuitenkaan välttämättä ole voimassa (harjoitustehtävä).

Lebesguen ulkomitan m^* määritelmä ja Lauseen 12.8 todistuksessa käytetty ulkomitan μ^* konstruktio ovat itse asiassa molemmat erikoistapauksia seuraavasta vielä yleisemmästä ideasta:

Määritelmä 12.9. Olkoon X joukko.

(a) Kokoelma $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ on **peiteluokka** (joukossa X), jos $\emptyset \in \mathcal{K}$ ja $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ joillekin $E_i \in \mathcal{K}$.

(b) Funktio $\tau \colon \mathcal{K} \to [0, \infty]$ on **esimitta** (joukossa X), jos $\tau(\emptyset) = 0$.

Lause 12.10. *Oletetaan, että $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ on peiteluokka ja $\tau \colon \mathcal{K} \to [0, \infty]$ on esimitta joukossa X. Määritellään funktio $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$,*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i) : E_i \in \mathcal{K} \ \ ja \ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Tällöin μ^* on ulkomitta joukossa X.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 12.11. (a) Lauseen 12.10 konstruktiosta saadaan Lebesguen ulkomitta m_n^*, kun $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K} = \big\{I \subset \mathbb{R}^n : I \text{ on avoin väli}\big\} \cup \{\emptyset\}$ ja $\tau(I) = v(I)$ (välin geometrinen mitta) kaikille $I \in \mathcal{K}$.

(b) Lauseen 12.8 todistuksessa $\mathcal{K} = \Gamma$ (tämä käy, sillä $\emptyset \in \Gamma$ ja $X \in \Gamma$) ja $\tau(A) = \mu(A)$ kaikille $A \in \Gamma$.

(c) Olkoon $\mathcal{K} = \big\{]a,b] \subset \mathbb{R} : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\big\} \cup \{\emptyset\}$ ja olkoon funktio $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava ja oikealta jatkuva eli $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ kaikille $x_0 \in \mathbb{R}$. Määritellään esimitta

$$\tau_f \colon \mathcal{K} \to [0,\infty],\ \tau_f\big(]a,b]\big) = f(b) - f(a) \quad \text{ja} \quad \tau_f(\emptyset) = 0.$$

Tällöin Lauseesta 12.10 saatavaa ulkomittaa μ_f^* vastaava joukon $\mathbb{R}$ mitta μ_f on niin sanottu *Lebesgue–Stieltjes* -mitta. Huomaa, että tapauksessa $f(x) = x$ saadaan tavallinen Lebesguen mitta m_1.

Huomautus. Jos Lauseen 12.10 tilanteessa $E \in \mathcal{K}$, niin on selvää, että $\mu^*(E) \leq \tau(E)$. Usein on toivottavaa, että itse asiassa $\mu^*(E) = \tau(E)$, ja näin käy esimerkiksi Lebesguen ulkomitan m^* konstruktiossa (Lause 2.7) sekä Lauseen 12.8 tilanteessa.

Voi kuitenkin olla voimassa myös aito epäyhtälö $\mu^*(E) < \tau(E)$. Olkoon esimerkiksi $X = \{a,b\}$ ja olkoon $\mathcal{K} = \mathcal{P}(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$. Määritellään esimitta $\tau \colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ asettamalla

$$\tau(\emptyset) = 0,\ \tau(\{a\}) = \tau(\{b\}) = 1 \quad \text{ja} \quad \tau(X) = 2018.$$

Tällöin Lauseen 12.10 antamalle ulkomitalle μ^* pätee

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) \leq 2 < 2018 = \tau(X).$$

(Itse asiassa on helppo nähdä, että μ^* on laskentamitta eli $\mu^* = \#$ joukossa X.)

13. Mittoja metrisissä avaruuksissa

Kahdessa edellisessä luvussa olemme tutkineet mittoja ja ulkomittoja ilman mitään erityisiä oletuksia joukosta X. Tässä luvussa teemme lisäoletuksen, että joukossa X on määriteltynä etäisyysfunktio eli metriikka d, jolloin kyseessä on siis metrinen avaruus. Erityisen kiinnostuksen kohteena ovat tällöin ne joukon X mitat, jotka ovat jossakin mielessä "yhteensopivia" metriikan d kanssa.

13.1. **Metriset ulkomitat**

Esitellään ensin hieman metrisiin avaruuksiin liittyvää terminologiaa. Varsinaisia esitietoja metrisistä avaruuksista emme tarvitse, ja lisäksi lukija voi halutessaan pitäytyä koko ajan tapauksessa $X = \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 13.1. Olkoon X joukko. Funktio $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ on **metriikka** joukossa X, jos

(i) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in X$,
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in X$. (kolmioepäyhtälö)

Tällöin sanotaan, että $X = (X, d)$ on **metrinen avaruus**.

Joukon $A \subset X$ **halkaisija** on

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ja joukkojen $A, B \subset X$ **etäisyys** on

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Esimerkki 13.2. (a) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidisen normin $\|\cdot\|$ avulla saadaan *euklidinen metriikka*, kun asetetaan $d(x, y) = \|x - y\|$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Jokaiseen joukkoon X voidaan määritellä niin sanottu *diskreetti metriikka* asettamalla kaikille $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ 1, & \text{jos } x \neq y. \end{cases}$$

Metrisen avaruuden X pallot sekä avoimet ja suljetut joukot määritellään aivan samoin, kuin euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$: Joukko

$$B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\} \subset X$$

on x-keskipisteinen r-säteinen avoin pallo. Joukko $A \subset X$ on *avoin*, jos kaikille $x \in A$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset A$, ja joukko A on *suljettu*, jos $A^c = X \setminus A$ on avoin.

Metrisen avaruuden X Borel-joukkojen σ-algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ on avaruuden X avoimien joukkojen virittämä σ-algebra.

Määritelmä 13.3. Olkoon $X = (X, d)$ metrinen avaruus. Ulkomitta $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on **metrinen ulkomitta**, jos

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

aina, kun $A, B \subset X$ ja $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

Metrisen ulkomitan määritelmässä additiivisuusominaisuus vaaditaan vain kahden positiivisella etäisyydellä toisistaan olevan joukon suhteen, mutta itse asiassa additiivisuus pätee myös numeroituvalle määrälle joukkoja, kunhan kaikkien joukkojen välillä on aidosti positiivinen etäisyys.

Lemma 13.4. *Olkoon μ^* metrinen ulkomitta metrisessä avarudessa $X = (X, d)$. Oletetaan, että joukoille $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, pätee, että $\operatorname{dist}(A_j, A_i) > 0$ aina, kun $i \neq j$. Tällöin*

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Metristen ulkomittojen merkityksestä kertoo seuraava tulos, jonka perusteella esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta m_n^* on metrinen ulkomitta.

Lause 13.5. *Olkoon $X = (X, d)$ metrinen avaruus ja olkoon μ^* ulkomitta avaruudessa X. Tällöin $\mathcal{B}_X \subset \Gamma_{\mu^*}$ (eli kaikki Borel-joukot ovat mitallisia) jos ja vain jos μ^* on metrinen ulkomitta.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Olkoot siis $A, B \subset X$ joukkoja, joille $d = \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Olkoon $U = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{d}{2})$. Tällöin $A \subset U$ ja $U \cap B = \emptyset$ (mieti!). Lisäksi U on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin, ja siten oletuksen perusteella $U \in \mathcal{B}_X \subset \Gamma_{\mu^*}$ eli joukko U on μ^*-mitallinen.

Koska nyt

$$(A \cup B) \cap U = (A \cap U) \cup (B \cap U) = A \cup \emptyset = A$$

ja

$$(A \cup B) \cap U^c = (A \cap U^c) \cup (B \cap U^c) = \emptyset \cup B = B,$$

saadaan Carathéodoryn ehdosta (31) testijoukolle $E = A \cup B$, että

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap U) + \mu^*((A \cup B) \cap U^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Näin ollen μ^* on metrinen ulkomitta.

"$\Leftarrow$" Riittää näyttää, että kaikki suljetut joukot ovat mitallisia, koska tällöin kaikki avoimet joukot, ja siten myös kaikki Borel-joukot, ovat mitallisia. Oletetaan siis, että $C \subset X$ suljettu. Olkoon $E \subset X$. Pitää osoittaa, että

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C^c).$$

Jos $\mu^*(E) = \infty$, on tämä selvästi voimassa, joten voidaan olettaa, että $\mu^*(E) < \infty$.

Kun $j \in \mathbb{N}$, merkitään

$$C_j = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \tfrac{1}{j}\}.$$

Tällöin $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = C$ (harjoitustehtävä; tässä tarvitaan tietoa, että C on suljettu). Koska $\operatorname{dist}\big(E \cap C_j^c, E \cap C\big) \geq \frac{1}{j} > 0$, saadaan ulkomitan μ^* monotonisuudesta $(E \cap C^c \supset E \cap C_j^c)$ sekä oletuksesta (μ^* on metrinen ulkomitta), että

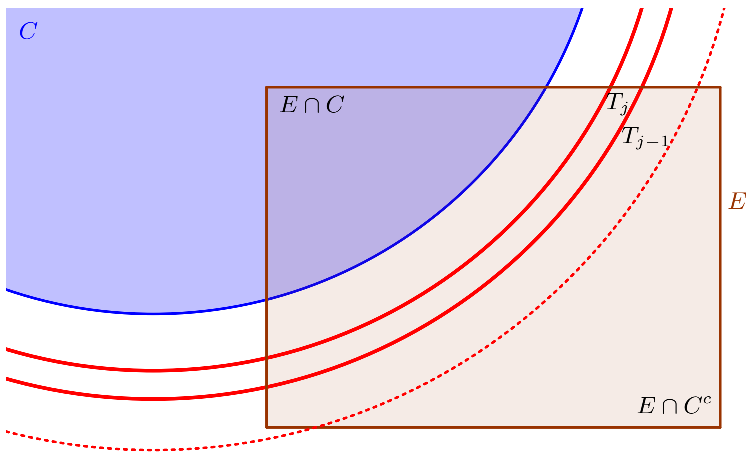
$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*\big((E \cap C) \cup (E \cap C^c)\big)\\ &\geq \mu^*\big((E \cap C) \cup (E \cap C_j^c)\big) = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C_j^c).\end{aligned}$$

Nyt riittää osoittaa, että

$$\lim_{j\to\infty} \mu^*(E \cap C_j^c) = \mu^*(E \cap C^c), \tag{34}$$

sillä tällöin haluttu mitallisuus seuraa, kun edellisessä arviossa annetaan $j \to \infty$. Koska $C \subset C_j$, niin $C_j^c \subset C^c$, joten monotonisuuden nojalla ainakin

$$\lim_{j\to\infty} \mu^*(E \cap C_j^c) \leq \mu^*(E \cap C^c).$$



Toisen suunnan osoittamiseksi merkitään $T_j = E \cap (C_j \setminus C_{j+1})$, kun $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $E \cap (C_j \setminus C) = \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k$ (jälleen tarvitaan tietoa, että C on suljettu), ja koska $C_j^c \subset C^c$, niin

$$\begin{aligned}E \cap C^c &= (E \cap C^c \cap C_j) \cup (E \cap C^c \cap C_j^c)\\ &= (E \cap (C_j \setminus C)) \cup (E \cap C_j^c) = \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k \cup (E \cap C_j^c).\end{aligned}$$

Ulkomitan subadditiivisuuden perusteella on siis

$$\mu^*(E \cap C^c) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu^*(T_k) + \mu^*(E \cap C_j^c),$$

ja väite (34) seuraa tästä, mikäli $\lim\limits_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mu^*(T_k) = 0$. Tähän puolestaan riittää, että $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_k) < \infty$. Nyt joukot T_{2i}, $i \in \mathbb{N}$, ovat positiivisen etäisyyden päässä toisistaan, ja siten monotonisuuden sekä Lemman 13.4 nojalla

$$\infty > \mu^*(E) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_{2i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T_{2i}).$$

Aivan vastaavasti myös $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(T_{2i+1}) < \infty$, ja näin ollen todella

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T_{2i}) + \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(T_{2i+1}) < \infty.$$

Väite (34) on siis voimassa, ja lause on todistettu. □

Esitellään vielä muutamia metrisissä avaruuksissa määriteltyihin (ulko)mittoihin liittyviä nimityksiä. Kannattaa tosin huomata, että kirjallisuudessa esiintyy myös hieman erilaisia määritelmiä Borel-säännöllisyydelle ja Radon-mitoille. Radon-mittojen määritelmä on tässä yhteydessä lisätietoa, eikä näitä käsitellä tällä kurssilla tämän enempää.

Määritelmä 13.6. Olkoon $X = (X, d)$ metrinen avaruus, olkoon $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ulkomitta ja olkoon $\mu = \mu^*|_{\Gamma_{\mu^*}}$. Tällöin

(a) (X, d, μ) on *metrinen mitta-avaruus*.

(b) μ on *Borel-mitta*, jos $\mathcal{B}_X \subset \Gamma_{\mu^*}$.

(c) ulkomitta μ^* on *Borel-säännöllinen*, jos μ on Borel-mitta ja kaikille $A \subset X$ on olemassa $B \in \mathcal{B}_X$ siten, että $A \subset B$ ja $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(*d) (ulko)mitta μ on *Radon-mitta*, jos μ on Borel-mitta ja lisäksi

(i) $\mu(K) < \infty$ kaikille *kompakteille* joukoille $K \subset X$.

(ii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U \text{ on kompakti}\}$ kaikille avoimille joukoille $U \subset X$.

(iii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ on avoin}\}$ kaikille joukoille $A \subset X$.

Muista, että esimerkiksi Lebesguen ulkomitta m_n^* on Borel-säännöllinen Lauseen 4.7 ja Huomautuksen 4.9 perusteella. Lebesguen (ulko)mitta on myös Radon-mitta. Lauseen 13.5 nojalla kaikki metriset ulkomitat ovat Borel-mittoja.

13.2. **Hausdorff-mitat**

Olkoon X metrinen avaruus. Lauseen 12.10 konstruktiosta saatava ulkomitta μ^* ei ole välttämättä metrinen ulkomitta. Tilanne korjantuu, jos ensin käytetään peiteluokkia $\mathcal{K}_j \supset \mathcal{K}_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, joiden alkioille $E \in \mathcal{K}_j$ pätee (esimerkiksi) $\operatorname{diam}(E) \leq \frac{1}{j}$. Näin saaduille ulkomitoille μ_j^* on voimassa $\mu_j^*(A) \leq \mu_{j+1}^*(A)$ kaikille $A \subset X$, koska indeksin j kasvaessa on käytettävissä vähemmän peittäviä joukkoja. Kasvavuuden perusteella kaikille $A \subset X$ on olemassa raja-arvo

$$\mu^*(A) := \lim_{j\to\infty} \mu_j^*(A) \quad \Big(= \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_j^*(A) \Big) \ \in [0, \infty].$$

Tällöin μ^* on metrinen ulkomitta avaruudessa X; tämän perustelu on oleellisesti sama, kuin alla Lauseen 13.8 todistuksessa.

Yllä kuvattu konstruktio metriselle ulkomitalle μ^* on niin sanottu *Carathéodoryn konstruktio*, ja sen tärkeimpänä erikoistapauksena saadaan Hausdorffin mitat.

Määritelmä 13.7. Olkoon $X = (X, d)$ metrinen avaruus. Kun $0 \leq s < \infty$ ja $0 < \delta \leq \infty$, niin joukon $A \subset X$ **s-ulotteinen Hausdorffin (δ-)sisältö** on

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ ja } \operatorname{diam}(E_i) \leq \delta \text{ kaikille } i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Vastaavasti joukon A **s-ulotteinen Hausdorffin mitta** on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \quad \Big(= \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)\Big).$$

Nimestään huolimatta Hausdorffin mitat ovat lähtökohtaisesti ulkomittoja, mikä osoitetaan Lauseessa 13.8. Toki rajoittumalla jälleen $\mathcal{H}^s$-mitallisiin joukkoihin saadaan aikaan mitta, ja itse asiassa Lauseesta 13.8 seuraa, että ainakin kaikki avaruuden X Borel-joukot ovat $\mathcal{H}^s$-mitallisia.

Huomautus. (a) Jos $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \infty$, niin $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$, koska pienemmälle luvulle käytössä on vähemmän peittäviä joukkoja. Erityisesti kaikille $0 < \delta < \infty$ pätee

$$\mathcal{H}^s_\infty(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Toisaalta kuitenkin $\mathcal{H}^s_\infty(A) = 0$ jos ja vain jos $\mathcal{H}^s(A) = 0$ (harjoitustehtävä).

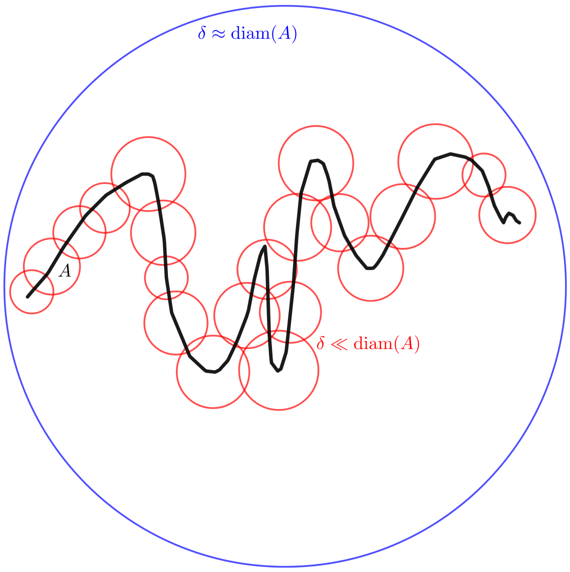
(b) Määritelmässä 13.7 voidaan peittävinä joukkoina käyttää myös (esimerkiksi) avoimia tai suljettuja joukkoja tai palloja, ja joskus sisällöt $\mathcal{H}^s_\delta$ ja mitat $\mathcal{H}^s$ "normalisoidaan" sopivalla vakiokertoimella.

(c) $\mathcal{H}^s_\delta$ on ulkomitta Lauseen 12.10 nojalla: käytetty peiteluokka on

$$\mathcal{K} = \{E \subset X : \operatorname{diam}(E) \leq \delta\}$$

ja esimittana on $\tau(E) = \operatorname{diam}(E)^s$; tapauksessa $s = 0$ käytetään tulkintaa $\operatorname{diam}(\emptyset)^0 = 0$ ja $\operatorname{diam}(E)^0 = 1$ kun $E \neq \emptyset$.

(d) Yleensä avaruuden X Borel-joukot eivät ole $\mathcal{H}^s_\delta$-mitallisia (harjoitustehtävä).



Jos $A \subset X$ ja $\operatorname{diam}(A) \leq \delta$, niin $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \operatorname{diam}(A)^s$. Kun $\delta \to 0$, huomioi $\mathcal{H}^s_\delta$ joukon "muodon" tarkemmin; vertaa yllä olevaan kuvaan. Jos esimerkiksi $A \subset \mathbb{R}^n$ on käyrä, lähestyy $\mathcal{H}^1_\delta(A)$ käyrän A pituutta, kun $\delta \to 0$.

Lause 13.8. *Metrisen avaruuden X Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^s$ on metrinen ulkomitta kaikille $s \geq 0$.*

Todistus. **(1)** $\mathcal{H}^s$ on ulkomitta: Kuten jo yllä todettiin, seuraa Lauseesta 12.10 että $\mathcal{H}^s_\delta$ on ulkomitta kaikille $0 < \delta \leq \infty$. Pitää siis vielä osoitaa, että halutut ulkomitan ominaisuudet säilyvät, kun $\delta \to 0$; tämän perustelu jätetään harjoitustehtäväksi.

(2) $\mathcal{H}^s$ on metrinen: Oletetaan siis, että $A, B \subset X$ ovat joukkoja, joille pätee, että $d := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Olkoon $0 < \delta < d$ ja olkoot $E_i \subset X$ joukkoja siten, että $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ ja $\operatorname{diam}(E_i) \leq \delta$ kaikille $i \in \mathbb{N}$.

Merkitään

$$I_A = \{i \in \mathbb{N} : A \cap E_i \neq \emptyset\} \quad \text{ja} \quad I_B = \{i \in \mathbb{N} : B \cap E_i \neq \emptyset\}.$$

Tällöin $I_A \cap I_B = \emptyset$, sillä jos $A \cap E_i \neq \emptyset$ jollekin $i \in \mathbb{N}$, niin tällöin $B \cap E_i = \emptyset$, ja vastaavasti jos $B \cap E_i \neq \emptyset$ jollekin $i \in \mathbb{N}$, niin tällöin $A \cap E_i = \emptyset$ (totea!). Lisäksi $A \subset \bigcup_{i \in I_A} E_i$ ja $B \subset \bigcup_{i \in I_B} E_i$, ja näin ollen

$$\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(E_i)^s \geq \sum_{i \in I_A} \operatorname{diam}(E_i)^s + \sum_{i \in I_B} \operatorname{diam}(E_i)^s \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Kun vasemmalla puolella otetaan infimum yli kaikkien tällaisten joukon $A \cup B$ peitteiden, saadaan

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Käänteinen epäyhtälö pätee aina subadditiivisuuden nojalla, ja siten

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

kaikille $0 < \delta < d$. Kun tässä annetaan $\delta \to 0$, saadaan

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B),$$

mikä todistaa, että $\mathcal{H}^s$ on todella metrinen ulkomitta. □

Huomautus 13.9. Seuraavat ovat tärkeitä erikoistapauksia Hausdorffin mitoista:

(a) Jos $A \subset X$, niin $\mathcal{H}^0(A) = \#(A)$ eli $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta.

(b) Kaikille $n \in \mathbb{N}$ on olemassa vakio $c_n > 0$ siten, että $\mathcal{H}^n(A) = c_n m_n^*(A)$ kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$. Tämän tarkka perustelu on kuitenkin melko työläs ja tekninen, kun $n \geq 2$. Helpompaa on sen sijaan osoittaa (harjoitustehtävä), että ainakin on olemassa vakio $C_n > 0$ siten, että kaikille $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$\tfrac{1}{C_n} m_n^*(A) \leq \mathcal{H}^n(A) \leq C_n m_n^*(A).$$

(c) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on *käyrä* eli $A = \gamma([0,1])$ jatkuvalle funktiolle $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, niin $\mathcal{H}^1(A)$ on käyrän pituus; katso [BBT, Section 3.8.2].

(d) Jos $0 < k < n$, $k \in \mathbb{N}$, niin on vakio $c_k > 0$ siten, että $c_k \mathcal{H}^k$ on ”luonnollinen k-ulotteinen pinta-alamitta” avaruudessa $\mathbb{R}^n$ (Carathéodory, 1914).

(e) $\mathcal{H}^s$ on kuitenkin mielekäs mitta myös silloin, kun $s \notin \mathbb{N}$ (Hausdorff, 1918). Tätä havainnollistaa seuraava esimerkki.

Esimerkki 13.10. Olkoon $C \subset [0,1]$ Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko kuten Esimerkissä 3.3 ja olkoon $s \geq 0$. Tällöin

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} J_{k,i},$$

joten $C \subset \bigcup_{i=1}^{2^k} J_{k,i}$, missä $\operatorname{diam}(J_{k,i}) \leq (\frac{1}{3})^k$ kaikille $k = 1, 2, \ldots, 2^k$. Näin ollen

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(C) \leq \sum_{i=1}^{2^k} (\tfrac{1}{3})^s = \left(\frac{2}{3^s}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 1, & \text{jos } 3^s = 2 \text{ eli } s = \frac{\log 2}{\log 3}, \\ 0, & \text{jos } 3^s > 2 \text{ eli } s > \frac{\log 2}{\log 3}, \\ \infty, & \text{jos } 3^s < 2 \text{ eli } 0 \leq s < \frac{\log 2}{\log 3}. \end{cases}$$

Toisaalta voidaan näyttää (katso *Huomautus 13.14), että vastaava pätee myös "$\geq$"-suuntaan. Jos siis merkitään, että $\lambda = \frac{\log 2}{\log 3}$, niin $0 < \mathcal{H}^\lambda(C) < \infty$ (itse asiassa $\mathcal{H}^\lambda(C) = 1$) ja

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} 0, & \text{jos } s > \lambda, \\ \infty, & \text{jos } 0 \leq s < \lambda. \end{cases}$$

Yleisestikin joukolle $A \subset X$ voi olla $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ korkeintaan yhdelle luvulle $0 \leq s < \infty$, sillä pätee:

Lemma 13.11. *Olkoon $A \subset X$.*

(a) *Jos $0 \leq s < \infty$ ja $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^t(A) = 0$ kaikille $t > s$.*

(b) *Jos $0 < s < \infty$ ja $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ kaikille $0 \leq t < s$.*

Todistus. (a) Kiinnitetään $t > s$. Olkoon $\delta > 0$ ja olkoot $E_i \subset X$ siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $\operatorname{diam}(E_i) \leq \delta$ kaikille $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\operatorname{diam}(E_i)^t = \operatorname{diam}(E_i)^s \operatorname{diam}(E_i)^{t-s} \leq \operatorname{diam}(E_i)^s \delta^{t-s},$$

sillä $t - s > 0$. Näin ollen

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^s.$$

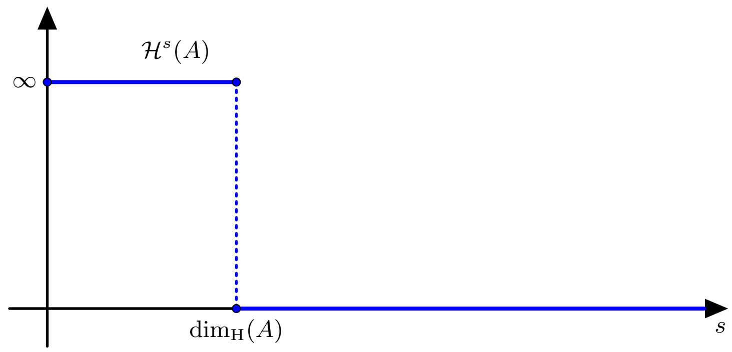
Kun oikealla puolella otetaan infimum yli kaikkien tällaisten joukon A peitteiden, saadaan

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(A) \xrightarrow{\delta\to 0} 0,$$

sillä $t - s > 0$ ja $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Täytyy siis olla $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(b) Tämä voidaan todistaa vastaavasti kuin (a)-kohta tai vielä suorempaan käyttämällä sopivasti (a)-kohdan tulosta (harjoitustehtävä). □

Yksikäsitteistä rajakohtaa, jossa $\mathcal{H}^s(A)$ muuttuu äärettömästä nollaksi, voidaan pitää joukon A luonnollisena ulottuvuutena eli dimensiona.



Määritelmä 13.12. Joukon $A \subset X$ **Hausdorff-dimensio** on luku

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

(Pätee myös, että $\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$, jos tämä joukko on epätyhjä.)

Huomautus. (a) Jos $s > \dim_{\mathrm{H}}(A)$, niin Lemman 13.11 perusteella $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Vastaavasti jos $0 \leq s < \dim_{\mathrm{H}}(A)$, niin $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

(b) Toisaalta jos $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin täytyy olla $\dim_{\mathrm{H}}(A) = s$. Kannattaa kuitenkin huomata, että voi olla myös $\mathcal{H}^s(A) = 0$ tai $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, kun $s = \dim_{\mathrm{H}}(A)$.

(c) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, niin $\dim_{\mathrm{H}}(A) = n$ (harjoitustehtävä; tässä on apua Huomautuksesta 13.9).

(d) Esimerkin 13.10 perusteella Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle $C \subset [0,1]$ on

$$\dim_{\mathrm{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}631.$$

(e) Yleensä ollaan kiinnostuneempia joukon A dimensiosta $\lambda = \dim_{\mathrm{H}}(A)$ kuin mitan $\mathcal{H}^\lambda(A)$ tarkasta arvosta. Tyypillisesti *fraktaalijoukolle* $A \subset \mathbb{R}^n$ (esimerkiksi Cantorin joukko C) pätee, että $\dim_{\mathrm{H}}(A) \notin \mathbb{N}$.

***Huomautus 13.13** (Itsesimilaarit fraktaalit)**.** Esimerkissä 3.3 annetun konstruktion ohella toinen tapa ajatella Cantorin $\frac{1}{3}$-joukkoa C on seuraava: Olkoot

$$\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \tfrac{1}{3}x \quad \text{ja} \quad \varphi_2(x) = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}.$$

Tällöin C on se *yksikäsitteinen* kompakti joukko $C \subset \mathbb{R}$, jolle pätee, että

$$C = \varphi_1(C) \cup \varphi_2(C).$$

Tämän idean yleistyksenä saadaan niin sanotut *itsesimilaarit joukot*. Oletetaan, että $\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, N$, ovat funktioita, joille pätee

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)\| = r_i \|x - y\|$$

kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$, missä $0 < r_i < 1$. (Voi esimerkiksi olla $\varphi_i(x) = r_i x + b_i$, missä $0 < r_i < 1$ ja $b_i \in \mathbb{R}^n$.) Voidaan osoittaa, että tällöin on olemassa yksikäsitteinen kompakti joukko $K \subset \mathbb{R}^n$, jolle pätee

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(K).$$

Sanotaan, että K on *iteroidun funktiosysteemin* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ määrittämä *itsesimilaari joukko.*

Jos tiedetään, että joukot $\varphi_i(K)$ eivät mene ”pahasti päällekäin” (esimerkiksi jos ne ovat kokonaan erillisiä), on $\dim_{\mathrm{H}}(K) = \lambda$, missä $\lambda > 0$ on se (yksikäsitteinen) luku, jolle pätee

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^{\lambda} = 1.$$

Lisäksi tällöin $0 < \mathcal{H}^{\lambda}(K) < \infty$ (Hutchinson, 1981).

Esimerkkejä itsesimilaareista fraktaaleista:

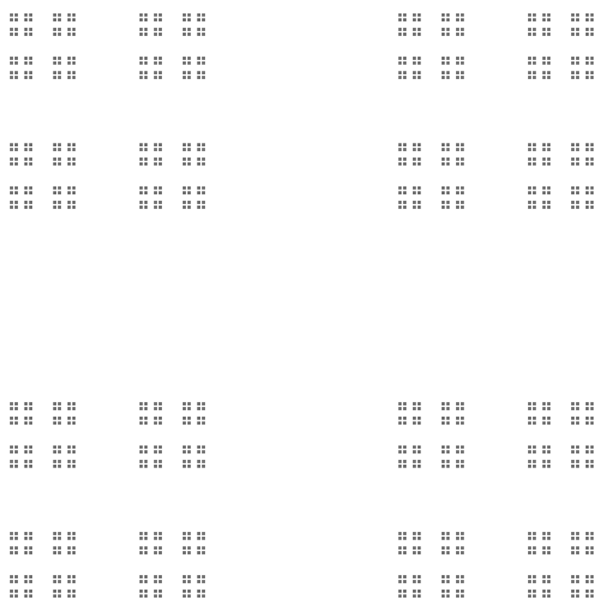
(a) Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle C pätee

$$\dim_{\mathrm{H}}(C) = \lambda \iff \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\lambda} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\lambda} = 1 \iff 2 = 3^{\lambda} \iff \lambda = \frac{\log 2}{\log 3},$$

kuten jo aiemminkin todettiin.

(b) Kaksiulotteinen vastine Cantorin $\frac{1}{3}$-joukolle saadaan käyttämällä iteroitua funktiosysteemiä $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, missä $\varphi_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2), \qquad \varphi_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2) + \left(\tfrac{2}{3}, 0\right),$$
$$\varphi_3(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2) + \left(0, \tfrac{2}{3}\right), \qquad \varphi_4(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}(x_1, x_2) + \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$



(Kuva: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cantor_dust.png`)

Koska tällöin $r_i = \frac{1}{3}$ kaikille $i = 1, 2, 3, 4$, niin näin saatavalle joukolle $K \subset \mathbb{R}^2$ pätee

$$\dim_{\mathrm{H}}(K) = \lambda \iff 4\big(\tfrac{1}{3}\big)^{\lambda} = 1 \iff 4 = 3^{\lambda} \iff \lambda = \frac{\log 4}{\log 3} \ \big(\in]1, 2[\,\big).$$

Huomaa, että jos tehdään vastaava konstruktio, missä $r_i = \frac{1}{4}$ kaikille $i = 1, 2, 3, 4$ ja $\varphi_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(x_1, x_2), \qquad \varphi_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(x_1, x_2) + \big(\tfrac{3}{4}, 0\big),$$
$$\varphi_3(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(x_1, x_2) + \big(0, \tfrac{3}{4}\big), \qquad \varphi_4(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}(x_1, x_2) + \big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}\big),$$

niin tällöin

$$\dim_{\mathrm{H}}(K) = \lambda \iff 4\big(\tfrac{1}{4}\big)^{\lambda} = 1 \iff 4 = 4^{\lambda} \iff \lambda = 1.$$

(Fraktaalin dimensio voi siis hyvin olla myös kokonaisluku.)

***Huomautus 13.14.** Osoitetaan vielä lisätietona, että jos $C \subset [0, 1]$ on Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko ja $\lambda = \frac{\log 2}{\log 3}$, niin todella $\mathcal{H}^{\lambda}(C) > 0$. Koska toisaalta Esimerkistä 13.10 tiedetään, että $\mathcal{H}^{\lambda}(C) \leq 1$, täytyy siis olla $\dim_{\mathrm{H}}(C) = \lambda$.

Näytetään, että itse asiassa $\mathcal{H}^{\lambda}(C) \geq \frac{1}{4}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $E_i \subset \mathbb{R}$, voidaan E_i peittää välillä $I_i \supset E_i$ siten, että $\operatorname{diam}(I_i) = \operatorname{diam}(E_i)$. Lisäksi, tarvittaessa väliä I_i aavistuksen verran laajentamalla, voidaan olettaa, että välit I_i ovat avoimia, jolloin joukon C kompaktiuden nojalla äärellinen määrä näitä välejä riittää peittämään joukon C. Näin ollen voidaan olettaa, että avoimille väleille I_i on voimassa

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{N} \operatorname{diam}(I_i)^{\lambda} \leq \mathcal{H}^{\lambda}_{\infty}(C) + \varepsilon.$$

Edelleen välejä I_i tarvittaessa hieman laajentamalla, voidaan olettaa, että näiden välien päätepisteet eivät kuulu joukkoon C. Olkoon $d > 0$ minimi välien I_i päätepisteiden etäisyyksistä joukkoon C, ja olkoon $k \in \mathbb{N}$ niin suuri, että $3^{-k} < d$. Tällöin kaikille Cantorin joukon konstruktiovaiheen k väleille $J_{k,\ell}$ pätee, että $J_{k,\ell} \subset I_i$ jollekin $i = 1, \ldots, N$.

Olkoon nyt $i \in \{1, 2 \ldots, N\}$ ja olkoon K pienin konstruktiovaihe, jolle $J_{K,j} \subset I_i$ jollakin $j = 1, \ldots, 2^K$ (jolloin siis $K \leq k$). Tällöin I_i leikkaa korkeintaan neljää vaiheen K konstruktioväliä, koska muuten I_i sisältäisi kokonaan myös jonkun vaiheen $K - 1$ konstruktiovälin. Tällöin

$$4 \operatorname{diam}(I_i)^{\lambda} \geq \sum_{J_{K,j} \cap I_i \neq \emptyset} \operatorname{diam}(J_{K,j})^{\lambda} \geq \sum_{J_{k,\ell} \subset I_i} \operatorname{diam}(J_{k,\ell})^{\lambda}. \tag{35}$$

Ensimmäinen arvio seuraa vain siitä, että summassa on korkeintaan neljä termiä, jotka kaikki ovat (jopa aidosti) pienempiä kuin $\operatorname{diam}(I_i)^{\lambda}$. Toisessa arviossa tarvitaan luvun s määritelmää: Jokainen väli $J_{K,j}$, joka leikkaa väliä I_i, sisältää 2^{k-K} kappaletta vaiheen k konstruktiovälejä $J_{k,\ell}$, joiden pituus on $3^{-k} = \operatorname{diam}(J_{k,\ell})$. Koska $\operatorname{diam}(J_{K,j}) = 3^{-K}$, saadaan tästä, että

$$\begin{aligned}\sum_{J_{k,\ell} \subset J_{K,j}} \operatorname{diam}(J_{k,\ell})^{\lambda} &= 2^{k-K} 3^{-k \log 2/\log 3} = 2^{k-K} 2^{-k} \\ &= 2^{-K} = 3^{-K \log 2/\log 3} = \operatorname{diam}(J_{K,j})^{\lambda}.\end{aligned}$$

Kun vasemman puolen summassa huomioidaan vain ne välit, jotka sisältyvät väliin I_i, pienenee summa, ja saadaan yhtälön (35) toinen arvio.

Toisaalta jokainen vaiheen k väleistä sisältyy ainakin yhteen peittävään väliin I_i, jolloin yhtälön (35) nojalla

$$\sum_{i=1}^{N} 4\operatorname{diam}(I_i)^\lambda \geq \sum_{i=1}^{N} \sum_{J_{k,\ell} \subset I_i} \operatorname{diam}(J_{k,\ell})^\lambda \geq \sum_{\ell=1}^{2^k} \operatorname{diam}(J_{k,\ell})^\lambda = 1.$$

Tässä viimeinen vaihe seuraa jälleen luvun λ määritelmästä. Näin ollen

$$\tfrac{1}{4} \leq \sum_{i=1}^{N} \operatorname{diam}(I_i)^\lambda \leq \mathcal{H}^\lambda_\infty(C) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^\lambda(C) + \varepsilon,$$

mistä väite lopulta seuraa, kun annetaan $\varepsilon \to 0$.

Lebesgue-integraalin teoria voidaan yleistää hyvin suoraviivaisesti mihin tahansa mitta-avaruuteen (X, Γ, μ). Tässä luvussa käydään tiiviisti läpi keskeisimmät integraaleihin liittyvät määritelmät ja tulokset, sekä annetaan joitakin esimerkkejä yleisiin integraaleihin liittyen.

Määritelmä 14.1. Oletetaan, että X on joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra. Olkoon $A \in \Gamma$. Funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on **Γ-mitallinen**, jos kaikille $a \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}\big(]a, \infty]\big) \in \Gamma.$$

Huomautus. (a) $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on Γ-mitallinen

$\iff$ $\{x \in A : f(x) < a\} \in \Gamma$ kaikille $a \in \mathbb{R}$, ja vastaava pätee myös epäyhtälöille "$\leq$" ja "$\geq$"; vertaa Lauseeseen 6.3.

$\iff$ $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in \Gamma$ ja $f^{-1}(B) \in \Gamma$ kaikille $B \in \mathcal{B}_1$; vertaa Lauseeseen 6.4.

(b) Jos $\mu\colon \Gamma \to [0, \infty]$ on mitta ja f on Γ-mitallinen, voidaan sanoa myös, että f on μ-mitallinen.

(c) Jos X on metrinen avaruus, $A \in \mathcal{B}_X$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on $\mathcal{B}_X$-mitallinen eli *Borel-mitallinen*, niin sanotaan myös, että f on *Borel-funktio*. Tällöin jokaisen Borel-joukon $B \in \mathcal{B}_1$ alkukuva on Borel-joukko $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X$. Erityisesti jokainen jatkuva funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on Borel-funktio.

(Yleisemmin metristen (tai topologisten) avaruuksien välinen kuvaus $f\colon X \to Y$ on Borel-funktio, jos jokaisen Borel-joukon $B \in \mathcal{B}_Y$ alkukuva on Borel-joukko $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X$.)

Lause 14.2. (a) *Oletetaan, että $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat Γ-mitallisia. Tällöin myös f^+, f^-, $f + g$, fg ja nollajatko $\tilde{f}$ ovat Γ-mitallisia (summa $f + g$ määrittelyjoukossaan).*

(b) *Oletetaan, että $f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ovat Γ-mitallisia kaikille $k \in \mathbb{N}$. Tällöin myös funktiot*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k \quad \textit{ja} \quad \liminf_{k\to\infty} f_k$$

ovat Γ-mitallisia, samoin $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$, mikäli raja-arvofunktio on olemassa.

Todistus. Todistukset ovat aivan samat, kuin Lebesgue-mitallisille funktioille; katso Lemma 6.8 sekä Lauseet 6.10, 6.12 ja 6.13. □

Määritelmä 14.3. Olkoon $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. Funktio $u\colon X \to \mathbb{R}$ on **Γ-yksinkertainen**, merkitään $u \in Y_\Gamma$, jos

$$u(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{kaikille } x \in X,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$ ja $A_i \in \Gamma$ kaikille $i = 1, \ldots, M$.

Huomautus. (a) Jokaisella $u \in Y_\Gamma$ on normaaliesitys, missä $a_i \neq a_j$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$; vertaa Lemmaan 5.3.

(b) Jos $u \in Y_\Gamma$ ja $u(x) \geq 0$ kaikille $x \in X$, niin merkitään, että $u \in Y_\Gamma^+$.

(c) Funktio $f\colon A \to [0,\infty]$ on Γ-mitallinen jos ja vain jos olemassa yksinkertaiset funktiot $u_k \in Y_\Gamma^+$ siten, että $u_k \le u_{k+1}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x)$ kaikille $x \in A$; vertaa Lauseeseen 6.15.

Määritelmä 14.4 (Integraali)**.** Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus.

(a) Olkoon funktion $u \in Y_\Gamma^+$ normaaliesitys $u(x) = \sum_{i=1}^M a_i \chi_{A_i}(x)$ ja olkoon $E \in \Gamma$. Tällöin
$$I(u, E; \mu) = \sum_{i=1}^{M} a_i \mu(A_i \cap E).$$

(b) Jos $f\colon A \to [0,\infty]$ on Γ-mitallinen, niin
$$\int_A f\, d\mu = \sup\big\{ I(u, A; \mu) : u \in Y_\Gamma^+,\ u(x) \le f(x) \text{ kaikille } x \in A \big\}.$$

(c) Jos $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on Γ-mitallinen ja ainakin toinen integraaleista $\int_A f^+\, d\mu$ ja $\int_A f^-\, d\mu$ on äärellinen, niin
$$\int_A f\, d\mu = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu.$$
(Jos $\int_A f^+\, d\mu = \infty = \int_A f^-\, d\mu$, ei integraalia ole määritelty.)

(d) Γ-mitallinen funktio f on μ**-integroituva** (yli joukon A), mikäli $\int_A f^+\, d\mu < \infty$ ja $\int_A f^-\, d\mu < \infty$. Tällöin merkitään $f \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$.

Integraaleille voidaan käyttää myös merkintää $\displaystyle\int_A f\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu(x).$

Huomautus. Funktiolle $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ pätee $f \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$ jos ja vain jos f on Γ-mitallinen ja $|f| \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$. Lisäksi tällöin
$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \le \int_A |f|\, d\mu$$
(Lemma 8.2 ja Lause 8.7 (b)).

Esimerkki 14.5. (a) Olkoon $a \in X$ ja olkoon $\delta_a\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$,
$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a \in E \\ 0, & \text{jos } a \notin E, \end{cases}$$
eli δ_a on Diracin delta-mitta. Tällöin
$$\int_A f\, d\delta_a = \begin{cases} f(a), & \text{jos } a \in A \\ 0, & \text{jos } a \notin A \end{cases}$$
kaikille $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ (perustelut harjoitustehtävä).

(b) Mitta-avaruudessa $(X, \mathcal{P}(X), \#)$ kaikille funktioille $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ pätee
$$\int_A f\, d\# = \sup\Big\{ \sum_{a\in I} f(a) : I \subset A \text{ on äärellinen} \Big\} \quad \Big(= \sum_{a \in A} f(a) \Big).$$

Erityisesti jos $X = \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$ ja merkitään $f(k) = a_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\# = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Toisin sanoen, summat ovat integraaleja(!). Jos $f\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ ja edelleen $f(k) = a_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, niin f on $\#$-integroituva jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ eli summa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti.

(c) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mitta-avaruus, missä $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ eli $\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta. Tällöin *satunnaismuuttuja* $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{F}$-mitallinen funktio, ja tämän *odotusarvo* on integraali

$$\mathbb{E}[x] = \int_{\Omega} x(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

(Lisää tästä Todennäköisyysteorian kursseilla.)

Määritelmä 14.6 (μ-melkein kaikilla)**.** Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja olkoon $A \in \Gamma$. Sanotaan, että ominaisuus $P(x)$ pätee **μ-melkein kaikilla** (μ-m.k.) $x \in A$ tai **μ-melkein kaikkialla** joukossa A, jos ominaisuus $P(x)$ pätee kaikille $x \in A \setminus N$, missä $N \in \Gamma$ ja $\mu(N) = 0$. Toisin sanoen joukko, jossa ominaisuus P ei päde, on μ-nollamittainen.

Lebesgue-integraalin keskeiset ominaisuudet pätevät myös yleisille integraaleille.

Lause 14.7 (Integraalin perusominaisuuksia)**.** *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja olkoon $A \in \Gamma$. Oletetaan, että $f, g \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin*

(a) $\lambda f \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$ *ja*

$$\int_A \lambda f\, d\mu = \lambda \int_A f\, d\mu \qquad \text{(lineaarisuus (i))}.$$

(b) $f + g \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$ *ja*

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu \qquad \text{(lineaarisuus (ii))}.$$

(c) *jos Γ-mitalliset joukot $A_j \subset A$ ovat erillisiä, niin*

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} f\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f\, d\mu \qquad \text{(additiivisuus)}.$$

(d) $|f(x)| < \infty$ *μ-melkein kaikilla $x \in A$.*

(e) $\displaystyle\int_A |f|\, d\mu = 0$ *jos ja vain jos $f(x) = 0$ μ-melkein kaikilla $x \in A$.*

(f) *jos $f(x) \le g(x)$ μ-melkein kaikille $x \in A$, niin*

$$\int_A f\, d\mu \le \int_A g\, d\mu \qquad \text{(monotonisuus funktion suhteen)}.$$

(g) *jos $f \ge 0$, $B \in \Gamma$ ja $B \subset A$, niin*

$$\int_B f\, d\mu \le \int_A f\, d\mu \qquad \text{(monotonisuus joukon suhteen)}.$$

Todistus. Todistukset ovat käytännössä aivan samat, kuin Lebesgue-integraalin tapauksessa. Useissa kohdissa väite todistetaan ensin yksinkertaisille funktioille kuten Luvussa 5, sitten ei-negatiivisille funktioille kuten Luvussa 7 ja lopuksi integroituville funktioille kuten Luvussa 8. Additiivisuus on mahdollista todistaa joko suoraan määritelmistä lähtien tai vaihtohtoisesti MK-lauseen 14.8 avulla. □

Huomautus. Kohtaa (d) lukuun ottamatta Lauseen 14.7 ominaisuudet pätevät myös, jos oletus $f, g \in \mathcal{L}^1(A; \mu)$ vaihdetaan oletukseksi, että $f, g\colon A \to [0, \infty]$ ovat Γ-mitallisia. Tällöin lauseen kohdassa (a) täytyy myös olettaa, että $\lambda \geq 0$, ja kohdissa (a) ja (b) pätee, että $\lambda f\colon A \to [0, \infty]$ ja $f + g\colon A \to [0, \infty]$ ovat Γ-mitallisia.

Myös tärkeät konvergenssilauseet ovat voimassa yleisille integraaleille. Näissä kaikissa (X, Γ, μ) on mitta-avaruus ja $A \in \Gamma$.

Lause 14.8 (Monotoninen konvergenssi)**.** *Oletetaan, että* $f_k\colon A \to [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, *ovat* Γ*-mitallisia funktioita siten, että funktiojono* (f_k) *on kasvava eli* $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ *kaikille* $x \in A$ *ja kaikille* $k \in \mathbb{N}$*. Tällöin*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, d\mu = \int_A \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu.$$

Todistus. Todistus on aivan sama, kuin Lebesgue-integraalin MK-lauseelle 7.5. □

Lause 14.9 (Fatoun lemma)**.** *Oletetaan, että* $f_k\colon A \to [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, *ovat* Γ*-mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k \, d\mu.$$

Todistus. Todistetaan MK-lauseen 14.8 avulla aivan kuten Lause 7.16. □

Lause 14.10 (Dominoitu konvergenssi)**.** *Oletetaan, että* $f, f_k\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, *ovat* Γ*-mitallisia funktioita siten, että*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \mu\text{-melkein kaikille } x \in A.$$

Oletetaan lisäksi, että on olemassa funktio $g \in \mathcal{L}^1(A; \mu)$ *siten, että kaikille* $k \in \mathbb{N}$ *pätee*

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad \mu\text{-melkein kaikille } x \in A.$$

Tällöin myös $f \in \mathcal{L}^1(A; \mu)$ *ja* $f_k \in \mathcal{L}^1(A; \mu)$ *kaikille* $k \in \mathbb{N}$*, ja*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Todistus. Todistetaan Fatoun Lemman 14.9 avulla aivan kuten Lause 8.9. □

Huomautus. Esimerkin 14.5 (b) perusteella summat voi tulkita integraaleiksi, ja siten konvergenssilauseet ovat käytössä myös summia tutkittaessa. Esimerkkejä tästä nähdään harjoitustehtävissä.

Esimerkki 14.11 (Integraalin derivointi parametrin suhteen)**.** Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja olkoon $A \in \Gamma$ joukko, jolle pätee $\mu(A) < \infty$. Oletetaan lisäksi, että $f \colon A \times]a, b[\to \mathbb{R}$ on funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- osittaisderivaatta $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ on olemassa kaikille $t \in]a, b[$ ja μ-melkein kaikille $x \in A$.
- on olemassa $0 < L < \infty$ siten, että
$$|f(x, t_1) - f(x, t_2)| \leq L|t_1 - t_2|$$
kaikilla $x \in A$ ja kaikilla $t_1, t_2 \in]a, b[$ (Lipschitz-ehto).
- funktio $x \mapsto f(x, t)$ on μ-integroituva kaikille $t \in]a, b[$.

Määritellään funktio $F \colon]a, b[\to \mathbb{R}$,
$$F(t) = \int_A f(x, t)\, d\mu(x),$$
ja tutkitaan tämän funktion derivoituvuutta.

Olkoon siis $t \in]a, b[$ ja olkoon $(h_k) \subset \mathbb{R}$ jono siten, että $\lim\limits_{k \to 0} h_k = 0$ ja $h_k \neq 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Jonon alkupäätä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $t + h_k \in]a, b[$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Kun $x \in A$, niin asetetaan
$$g_k(x, t) = \frac{f(x, t + h_k) - f(x, t)}{h_k}.$$
Tällöin funktio $x \mapsto g_k(x, t)$, $x \in A$, on mitallinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja
$$\lim_{k \to \infty} g_k(x, t) = \tfrac{\partial}{\partial t} f(x, t) \qquad \mu\text{-melkein kaikille } x \in A.$$
Lisäksi Lipschitz-oletuksen perusteella kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee
$$|g_k(x, t)| = \frac{1}{|h_k|} \big| f(x, t + h_k) - f(x, t) \big| \leq \frac{1}{|h_k|} L |t + h_k - t| = L.$$
Koska $\mu(A) < \infty$, on vakiofunktio $g(x) = L$ tällöin μ-integroituva yli joukon A, ja siten DK-lause 14.10 soveltuu funktiojonoon $(g_k(\cdot, t))_{k=1}^{\infty}$. Näin ollen funktion F erotusosamäärälle pisteessä $t \in]a, b[$ saadaan integraalin lineaarisuuden ja DK-lauseen avulla, että
$$\begin{aligned}
\frac{F(t + h_k) - F(t)}{h_k} &= \frac{1}{h_k} \int_A \big(f(x, t + h_k) - f(x, t) \big)\, d\mu(x) \\
&= \int_A g_k(x, t)\, d\mu(x) \xrightarrow[k \to \infty]{\text{(DK)}} \int_A \tfrac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$
Koska tämä pätee kaikille jonoille (h_k), joille $\lim\limits_{k \to 0} h_k = 0$ ja $h_k \neq 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, on funktio F derivoituva jokaisessa pisteessä $t \in]a, b[$ ja
$$F'(t) = \int_A \tfrac{\partial}{\partial t} f(x, t)\, d\mu(x) \qquad \text{kaikille } t \in]a, b[.$$

Huomautus. Vastaavia derivointituloksia voidaan todistaa myös hieman erilaisista oletuksista lähtien.

Kappaleessa 10.2 määriteltiin, että funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

aina, kun $]a_j, b_j[\subset [a,b]$ ovat erillisiä avoimia välejä ja $\sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta$. Tässä luvussa määritellään vastaava käsite mitoille ja luodaan yhteyksiä funktioiden ja mittojen absoluuttisten jatkuvuuksien välille.

Määritelmä 15.1. Oletetaan, että $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra ja että $\mu, \nu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ ovat mittoja. Mitta ν on **absoluuttisesti jatkuva mitan μ suhteen**, jos $\nu(E) = 0$ aina, kun $E \in \Gamma$ ja $\mu(E) = 0$. Tällöin merkitään $\nu \ll \mu$.

Esimerkki 15.2. (a) Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\delta_a\colon \mathcal{M}_n \to [0,\infty]$ vastaava Diracin delta-mitta. Tällöin **ei** päde $\delta_a \ll m_n$ eikä myöskään $m_n \ll \delta_a$ (harjoitustehtävä).

(b) Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A \in \Gamma$ ja $f\colon A \to [0,\infty]$ Γ-mitallinen. Määritellään $\nu_f\colon \Gamma \to [0,\infty]$,

$$\nu_f(E) = \int_{A \cap E} f \, d\mu \qquad \text{kaikille } E \in \Gamma.$$

Tällöin ν_f on mitta ja $\nu_f \ll \mu$ (harjoitustehtävä). Välttämättä ei kuitenkaan päde, että myös $\mu \ll \nu_f$.

Termiä *absoluuttinen jatkuvuus* selittää seuraava tulos, jonka mukaan äärellisille mitoille absoluuttinen jatkuvuus voidaan karakterisoida ε–δ -ehdolla.

Lause 15.3. *Oletetaan, että $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra ja että $\mu, \nu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ ovat mittoja. Oletetaan lisäksi, että $\nu(X) < \infty$. Tällöin $\nu \ll \mu$ jos ja vain jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\nu(A) < \varepsilon$ aina, kun $A \in \Gamma$ ja $\mu(A) < \delta$.*

Todistus. "$\Leftarrow$" Tämä suunta on selvä: Jos $\mu(A) = 0$, niin $\nu(A) < \varepsilon$ kaikille $\varepsilon > 0$ (koska $\mu(A) < \delta$ pätee aina), ja siten $\nu \ll \mu$.

"$\Rightarrow$" Tehdään antiteesi, että ε–δ -ehto ei päde. Tällöin on siis olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikille $\delta > 0$ löytyy $A \in \Gamma$, jolle pätee $\mu(A) < \delta$ mutta $\nu(A) \geq \varepsilon$. Erityisesti kaikille $j \in \mathbb{N}$ löytyy joukko $A_j \in \Gamma$ siten, että $\mu(A_j) < 2^{-j}$, mutta $\nu(A_j) \geq \varepsilon$.

Määritellään nyt kaikille $M \in \mathbb{N}$, että $B_M = \bigcup\limits_{j=M}^{\infty} A_j$, jolloin $B_M \in \Gamma$ kaikille $M \in \mathbb{N}$ ja $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$. Olkoon $B = \bigcap_{M=1}^{\infty} B_M$. Tällöin mitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden sekä geometrisen summan kaavan perusteella

$$\mu(B) \leq \mu(B_M) \leq \sum_{j=M}^{\infty} m(A_j) < \sum_{j=M}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-M} \xrightarrow{M\to\infty} 0,$$

joten $\mu(B) = 0$.

Toisaalta mitan monotonisuuden nojalla kaikille $M \in \mathbb{N}$ pätee $\nu(B_M) \geq \nu(A_M) \geq \varepsilon$, sillä $A_M \subset B_M$. Koska lisäksi $\nu(B_1) \leq \nu(X) < \infty$, saadaan Lauseen 11.10 (e)-kohdan avulla, että

$$\nu(B) = \lim_{M\to\infty} \nu(B_M) \geq \varepsilon.$$

Siten $\mu(B) = 0$ mutta $\nu(B) \geq \varepsilon > 0$, joten ei olekaan $\nu \ll \mu$. Tämä on ristiriita, ja väite on todistettu. □

Huomautus. Ehto $\nu(X) < \infty$ on välttämätön Lauseessa 15.3: Olkoon $X =]0,1[$, $\mu(A) = m_1(A)$ kun $A \subset]0,1[$ ja $A \in \mathcal{M}_n$, ja asetetaan, että

$$\nu(A) = \int_A \tfrac{1}{x}\, dm_1(x).$$

Tällöin $\nu \ll m_1$, mutta ε–δ -ehto ei päde, koska kaikille $\delta > 0$ on $\nu(]0,\delta[) = \infty$, vaikka $m_1(]0,\delta[) = \delta$.

Absoluuttisen jatkuvuuden ε–δ -ehdon avulla saadaan seuraava integraaleja koskeva tieto.

Seuraus 15.4. *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A \in \Gamma$ ja $f \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$. Tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

$$\int_{A\cap E} |f|\, d\mu < \varepsilon \quad \text{aina, kun } E \in \Gamma \text{ ja } \mu(E) < \delta.$$

Todistus. Merkitään $\nu(E) = \int_{A\cap E} |f|\, d\mu$ kaikille $E \in \Gamma$. Tällöin ν on mitta ja $\nu \ll \mu$ (Esimerkki 15.2 (b)) ja lisäksi $\nu(X) = \int_A |f|\, d\mu < \infty$ funktion f integroituvuuden nojalla. Siten Lause 15.3 soveltuu mittoihin μ ja ν, joten kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\int_{A\cap E} |f|\, d\mu = \nu(E) < \varepsilon$$

aina, kun $E \in \Gamma$ ja $\nu(E) < \delta$. □

Esimerkki 15.2 (b) siis kertoo, että integraaleista saatavat mitat ovat aina absoluuttisesti jatkuvia alkuperäisen mitan suhteen. Käänteiseen suuntaan pätee seuraava vahva tulos, jota ei kuitenkaan tällä kurssilla käsitellä tarkemmin.

Lause 15.5 (Lebesgue–Radon–Nikodym)**.** *Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, missä μ on σ-äärellinen. Jos $\nu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ on σ-äärellinen ja $\nu \ll \mu$, niin on olemassa Γ-mitallinen funktio $f\colon X \to [0,\infty]$ siten, että*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{kaikille } A \in \Gamma.$$

Todistus. Ohitetaan, katso esimerkiksi [BBT, Section 5.8]. □

Lauseen 15.5 antamaa funktiota f sanotaan mitan ν *Radon–Nikodym -derivaataksi* mitan μ suhteen ja tälle käytetään usein merkintää $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Tätä terminologiaa selittää seuraavan lauseen tuttu erikoistapaus, jossa palataan Lauseen 10.5 helpomman suunnan todistukseen mittojen absoluuttisen jatkuvuuden avulla.

Lause 15.6. *Oletetaan, että funktio* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on derivoituva melkein kaikilla* $x \in [a,b]$*,* $f' \in \mathcal{L}^1([a,b];m_1)$ *ja*

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'\,dm \qquad \textit{kaikille } x \in [a,b]. \tag{36}$$

Tällöin f *on absoluuttisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Pitää siis osoittaa, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

aina, kun $I_j = \,]a_j, b_j[\, \subset [a,b]$ ovat erillisiä avoimia välejä ja $\sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta$.

Koska $f' \in \mathcal{L}^1([a,b];m_1)$, niin Seurauksen 15.4 nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\int_{A \cap [a,b]} |f'|\,dm_1 < \varepsilon \qquad \text{aina, kun } m_1(A) < \delta.$$

Olkoon nyt $E = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, missä välit $I_j = \,]a_j, b_j[\, \subset [a,b]$ ovat erillisiä ja avoimia, ja oletetaan, että

$$m_1(E) = \sum_{j=1}^{k} m_1(I_j) = \sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta.$$

Oletuksen (36) ja integraalin additiivisuuden perusteella kaikille $j = 1, 2, \ldots, k$ pätee

$$\begin{aligned} |f(b_j) - f(a_j)| &= \big| f(b_j) - f(a) - \big(f(a_j) - f(a)\big)\big| \\ &= \left| \int_{[a,b_j]} f'\,dm_1 - \int_{[a,a_j]} f'\,dm_1 \right| = \left| \int_{]a_j,b_j]} f'\,dm_1 \right| \le \int_{I_j} |f'|\,dm_1. \end{aligned}$$

Näin ollen integraalin additiivisuudesta ja luvun $\delta > 0$ valinnasta saadaan, että

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| \le \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} |f'|\,dm_1 = \int_E |f'|\,dm_1 < \varepsilon,$$

kuten haluttiin. Siispä f on absoluuttisesti jatkuva. □

Myös käänteinen suunta pätee Lauseessa 15.6 (katso Lause 10.5). Siten voidaan sanoa, että

- ”absoluuttisesti jatkuva funktio f on derivaattansa f' integraali” (Lause 10.5)
- ”absoluuttisesti jatkuva mitta ν on derivaattansa $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ integraali” (Lause 15.5).

Mitta- ja integraaliteorian kannalta erittäin oleellinen absoluuttisesti jatkuvien funktioiden ominaisuus on se, että ne kuvaavat nollamittaiset joukot nollamittaisiksi:

Lause 15.7. *Olkoon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *absoluuttisesti jatkuva funktio. Jos* $E \subset [a,b]$ *ja* $m_1(E) = 0$*, niin myös* $m_1(f(E)) = 0$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Absoluuttisesti jatkuvat funktiot ovat myös *rajoitetusti heilahtelevia.*

Määritelmä 15.8. Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ **kokonaisheilahtelu** (välillä $[a,b]$) on

$$V_f(a,b)=\sup\Bigg\{\sum_{j=1}^{k}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big| : a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k=b,\ k\in\mathbb{N}\Bigg\}.$$

Funktio f on **rajoitetusti heilahteleva** (välillä $[a,b]$), jos $V_f(a,b)<\infty$.

Esimerkki 15.9. Jos $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on monotoninen (kasvava tai vähenevä), niin f on rajoitetusti heilahteleva. Esimerkiksi kasvavalle funktiolle f pätee

$$\sum_{j=1}^{k}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big|=\sum_{j=1}^{k}\big(f(x_j)-f(x_{j-1})\big)=f(b)-f(a)<\infty$$

aina, kun $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k=b$.

Lause 15.10. *Olkoon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Tällöin f on rajoitetusti heilahteleva.*

Todistus. Valitaan $\varepsilon=1$ ja olkoon $\delta>0$ tätä vastaava luku absoluuttisen jatkuvuuden määritelmässä. Valitaan lisäksi $N\in\mathbb{N}$ siten, että $\frac{b-a}{N}<\delta$, ja merkitään $a_i=a+i\frac{b-a}{N}$. Tällöin siis $a_0=a$ ja $a_N=b$, ja kaikille $i=1,2,\ldots,N$ pätee

$$a_i-a_{i-1}=\frac{b-a}{N}<\delta.$$

Olkoon nyt $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$ välin $[a,b]$ jako, jolloin siis $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k=b$. Jakopisteitä tarvittaessa lisäämällä voimme olettaa, että $a_i\in P$ kaikille $i=1,2,\ldots,N$ (pisteiden lisääminen ei ainakaan pienennä alla laskettavia summia). Tällöin siis $a_i=x_{j_i}$ joillekin $j_i\in\{0,1,\ldots,k\}$, $j_i<j_{i+1}$. Pisteiden a_{i-1} ja a_i välissä olevien osavälien $]x_{j-1},x_j[\ \subset\ ]a_{i-1},a_i[$ yhteispituus on alle δ, ja siten absoluuttisen jatkuvuuden määritelmän perusteella

$$\sum_{j=1}^{k}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big|=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big|}_{\le\varepsilon=1}\le N<\infty.$$

Näin ollen myös $V_f(a,b)\le N<\infty$, ja väite on todistettu. □

Lause 15.11. *Funktio $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva jos ja vain jos on olemassa kasvavat funktiot $u,v\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ siten, että $f(x)=u(x)-v(x)$ kaikille $x\in[a,b]$.*

Todistus. "$\Leftarrow$" Tämä seuraa helposti Esimerkistä 15.9 ja siitä, että $V_{u-v}(a,b)\le V_u(a,b)+V_v(a,b)$.

"$\Rightarrow$" Määritellään funktiot $u,v\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ asettamalla $u(x)=V_f(a,x)$ ja $v(x)=V_f(a,x)-f(x)$ kaikille $x\in[a,b]$. Tällöin kaikille $a\le x<y\le b$ saadaan

$$u(x)-u(y)=V_f(x,y)\ge 0,$$

ja toisaalta

$$v(x)-v(y)=V_f(x,y)-\big(f(x)-f(y)\big)\ge|f(x)-f(y)|-\big(f(x)-f(y)\big)\ge 0,$$

sillä aina on voimassa arvio $V_f(a,b)\le|f(b)-f(a)|$. Näin ollen u ja v ovat todella kasvavia ja selvästi $f=u-v$. □

Huomautus. (a) Esimerkin 10.6 Cantorin funktio $f\colon [0,1] \to [0,1]$ on kasvava, ja siten myös rajoitetusti heilahteleva, mutta ei absoluuttisesti jatkuva. Pätee myös, että $f(C) = [0,1]$, missä C on Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko, joten nollamittaisen joukon C kuvajoukko ei ole nollamittainen; vertaa Lauseeseen 15.7.

(b) Voidaan osoittaa, että jokainen monotoninen funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva melkein kaikilla $x \in [a,b]$; katso esimerkiksi [BBT, Section 7.2]. Tällöin Lauseesta 15.11 seuraa, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio on derivoituva melkein kaikkialla, jolloin Lauseen 15.10 mukaan myös jokainen absoluuttisesti jatkuva funktio on derivoituva melkein kaikkialla. Muista, että jälkimmäinen tieto on osa Lauseen 10.5 hankalamman suunnan väitettä.

16. L^p-AVARUUDET

Funktioavaruudet $L^p(A;\mu)$, $1 \le p \le \infty$, ovat erittäin keskeisiä modernissa matemaattisessa analyysissä. Tässä luvussa tutustutaan näiden avaruuksien määritelmiin ja tärkeimpiin ominaisuuksiin. Erityisesti todistetaan Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt sekä osoitetaan L^p-avaruuksien täydellisyys.

Määritelmä 16.1. Olkoon (X,Γ,μ) mitta-avaruus. Kun $A \in \Gamma$, merkitään

$$M(A) = \big\{ f\colon A \to \overline{\mathbb{R}} \bigm| f \text{ on } \Gamma\text{-mitallinen ja määritelty } \mu\text{-m.k. } x \in A \big\}.$$

Kun $1 \le p < \infty$, niin asetetaan

$$\mathcal{L}^p(A) = \mathcal{L}^p(A;\mu) = \Big\{ f \in M(A) : \int_A |f|^p \, d\mu < \infty \Big\}.$$

Lisäksi sanotaan, että funktio $f \in M(A)$ on *oleellisesti rajoitettu* ja merkitään $f \in \mathcal{L}^\infty(A;\mu)$, jos

$$\operatorname*{ess\,sup}_A |f| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)| := \inf\big\{ c \ge 0 : |f(x)| \le c \ \mu\text{-m.k. } x \in A \big\} < \infty.$$

Funktiolle $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$, $1 \le p \le \infty$, määritellään niin sanottu p**-normi** asettamalla

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(A)} := \Big(\int_A |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}, \qquad \text{kun } 1 \le p < \infty,$$

ja

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(A)} := \operatorname*{ess\,sup}_A |f|.$$

Huomautus. (a) Kaikille $1 \le p \le \infty$ pätee siis: $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu) \iff \|f\|_p < \infty$.

(b) $\|\cdot\|_p$ ei ole "oikea" normi joukossa $\mathcal{L}^p(A;\mu)$, koska pätee

$$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \ \mu\text{-m.k. } x \in A.$$

Normille pitäisi olla $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ eli $f(x) = 0$ kaikille $x \in A$. Muut normin ominaisuudet $\|\cdot\|_p$ toteuttaa ja pienellä modifikaatiolla joukosta $\mathcal{L}^p(A;\mu)$ saadaan "oikea" normiavaruus; tähän palataan hieman myöhemmin.

(c) Jos $f \in M(A)$, niin $\|f\|_p \le \|f\|_\infty \mu(A)^{\frac{1}{p}}$ (mieti!). Erityisesti jos $\mu(A) < \infty$, niin pätee $\mathcal{L}^\infty(A;\mu) \subset \mathcal{L}^p(A;\mu)$ kaikille $1 \le p < \infty$.

(d) Jos $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$, $1 \le p \le \infty$, niin $|f(x)| < \infty$ μ-m.k. $x \in A$, ja jos $f \in \mathcal{L}^\infty(A;\mu)$, niin $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ μ-m.k. $x \in A$. Huomaa, että jälkimmänen tieto ei seuraa ihan suoraan ∞-normin määritelmästä, vaan vaatii pienen lisäpäättelyn, joka jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 16.2. Olkoon $A = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$, $f(x) = \|x\|^{-s}$, missä $s > 0$. Tällöin $f \in \mathcal{L}^p(A;m_n)$ jos ja vain jos $1 \le p < \frac{n}{s}$ (harjoitustehtävä).

Määritelmä 16.3. Luvut $p,q \in [1,\infty]$ ovat toistensa **konjugaattieksponentit**, jos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (missä $\frac{1}{\infty} = 0$). Usein merkitään $q = p'$.

Esimerkiksi $p = 1$ ja $q = \infty$ ovat toistensa konjugaatit, samoin $p = 2$ ja $q = 2$. Itse asiassa luvut $p,q \in \,]1,\infty[$ ovat konjugaatit jos ja vain jos $q = \frac{p}{p-1}$. Helposti nähdään, että konjugaattieksponenteille p,q pätee $1 < p < 2 \iff 2 < q < \infty$.

Lemma 16.4 (Youngin epäyhtälö)**.** *Oletetaan, että $p, q \in]1, \infty[$ ovat konjugaattieksponentit ja että $a, b \geq 0$. Tällöin*

$$ab \leq \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q.$$

Todistus. Väite voidaan todistaa esimerkiksi funktion $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}b^q - xb$, $x \geq 0$, ääriarvoja tutkimalla. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

Seuraava on modernin analyysin käytetyimpiä tuloksia:

Lause 16.5 (Hölderin epäyhtälö)**.** *Oletetaan, että $p, q \in [1, \infty]$ ovat konjugaattieksponentit. Jos $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$ ja $g \in \mathcal{L}^q(A;\mu)$, niin $fg \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$ ja*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Erityisesti tapauksessa $p, q \in]1, \infty[$ on voimassa epäyhtälö

$$\int_A |fg|\,d\mu \leq \left(\int_A |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_A |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Todistus. **(1)** Tutkitaan ensin tapaus $p = 1$, $q = \infty$. Tällöin $|fg| \leq |f|\|g\|_\infty$ μ-m.k. joukossa A, mistä seuraa, että

$$\|fg\|_1 = \int_A |fg|\,d\mu \leq \int_A |f|\|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \int_A |f|\,d\mu = \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

kuten haluttiin.

(2) Oletetaan sitten, että $1 < p, q < \infty$. Jos $\|f\|_p = 0$ tai $\|g\|_q = 0$, niin $f = 0$ tai $g = 0$ μ-m.k. joukossa A, jolloin myös $\|fg\|_1 = 0$ ja väitetty epäyhtälö pätee. Voidaan siis olettaa, että $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$. Käytetään Youngin epäyhtälöä (Lemma 16.4) lukuihin

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

jolloin yhdessä integraalin lineaarisuuden kanssa saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_A |fg|\,d\mu &= \int_A \underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}}_{=a}\underbrace{\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{=b}\,d\mu(x) \overset{\text{(L.16.4)}}{\leq} \int_A \tfrac{1}{p}a^p\,d\mu + \int_A \tfrac{1}{q}b^q\,d\mu \\
&= \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\underbrace{\int_A |f(x)|^p\,d\mu(x)}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\underbrace{\int_A |g(x)|^q\,d\mu(x)}_{=\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Kertomalla tämä puolittain luvulla $\|f\|_p\|g\|_q > 0$ nähdään, että

$$\|fg\|_1 = \int_A |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$

kuten pitikin. □

Huomautus. (a) Tapauksessa $p = q = 2$ Hölderin epäyhtälöstä saadaan niin sanottu Cauchy–Schwarz–Bunjakowski -epäyhtälö $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2$.

(b) Kun $1 < p, q < \infty$, pätee Hölderin epäyhtälössä yhtäsuuruus jos ja vain jos on olemassa $c \geq 0$ siten, että $|g|^q = c|f|^p$ (μ-m.k.) joukossa A tai $|f|^p = c|g|^q$ (μ-m.k.) joukossa A.

(c) Jos $f \in M(A)$ ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$, niin soveltamalla Hölderin epäyhtälöä, missä toisena funktiona on $g = \chi_A$ ja toinen eksponenteista on $\frac{q}{p}$, saadaan (harjoitustehtävä)

$$\|f\|_p \leq \mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Tapauksessa $\mu(A) < \infty$ tästä seuraa välittömästi, että $\mathcal{L}^q(A;\mu) \subset \mathcal{L}^p(A;\mu)$.

(d) Jos $0 < \mu(A) < \infty$, niin μ-integroituvan funktion g *keskiarvointegraali* yli joukon A on

$$\fint_A g\, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A g\, d\mu.$$

Edellisen kohdan avulla nähdään helposti, että kaikille $1 \leq p \leq q < \infty$ pätee

$$\left(\fint_A |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\fint_A |f|^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

Seuraava tulos on tärkeä, koska se antaa kolmioepäyhtälön p-normille $\|\cdot\|_p$.

Lause 16.6 (Minkowskin epäyhtälö)**.** *Olkoon* $1 \leq p \leq \infty$ *ja olkoot* $f, g \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$. *Tällöin myös* $f + g \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$ *ja*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Todistus. Koska $f, g \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$, niin $|f(x)| < \infty$ ja $|g(x)| < \infty$ pätee μ-melkein kaikille $x \in A$. Siten summa $f(x) + g(x)$ on määritelty μ-melkein kaikille $x \in A$. Lisäksi pätee, että $\|f + g\|_p < \infty$ (harjoitustehtävä), joten $f + g \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$. Todistetaan sitten itse epäyhtälö:

(1) $p = 1$. Koska

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \mu\text{-m.k. } x \in A,$$

seuraa väite integraalin lineaarisuudesta ja monotonisuudesta funktion suhteen.

(2) $p = \infty$. Koska

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \mu\text{-m.k. } x \in A,$$

on ∞-normin määritelmän mukaan $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(3) $1 < p < \infty$. Huomataan aluksi, että

$$|f + g|^p = \underbrace{|f + g|}_{\leq |f| + |g|} |f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Käytetään vasemman puolen funktioiden integraaleihin Hölderin epäyhtälöä eksponenteille p ja $q = \frac{p}{p-1}$; huomaa, että tällöin $\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^p$. Näin saadaan, että

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_A |f+g|^p \, d\mu \le \int_A |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_A |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \\
&\overset{\text{(Hölder)}}{\le} \left(\int_A |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\int_A |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}
$$

Koska tiedettiin jo, että $\|f+g\|_p < \infty$, voidaan edellä saatu epäyhtälö jakaa puolittain luvulla $\|f+g\|_p^{p-1}$, ja saadaan haluttu Minkowskin epäyhtälö. □

Kerrataan seuraavaksi hieman normiavaruuksiin liittyvää terminologiaa.

Määritelmä 16.7. Olkoon E reaalikertoiminen vektoriavaruus, jolloin siis erityisesti $x + y \in E$ ja $\lambda x \in E$ aina, kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Funktio $\|\cdot\| \colon E \to [0, \infty[$ on **normi** avaruudessa E, jos
   - (i) $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$,
   - (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$,
   - (iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ kaikille $x, y \in E$. (kolmioepäyhtälö)

   Tällöin sanotaan, että $E = (E, \|\cdot\|)$ on **normiavaruus**.

(b) Normiavaruus $E = (E, \|\cdot\|)$ on **Banach-avaruus**, jos se on *täydellinen* eli jokainen avaruuden $(E, \|\cdot\|)$ *Cauchy-jono* suppenee. Toisin sanoen, jos $x_k \in E$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$ aina, kun $k, \ell \ge N$, niin on olemassa $x \in E$ jolle pätee, että $\|x_k - x\| \to 0$, kun $k \to \infty$.

Huomautus. Olkoon $E = (E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Määritellään kaikille $x, y \in E$, että $d(x, y) = \|x - y\|$. Tällöin d on metriikka avaruudessa E, joten jokainen normiavaruus on myös metrinen avaruus.

Funktio $\|\cdot\|_p \colon \mathcal{L}^p(A; \mu) \to [0, \infty[$ eli p-normi toteuttaa normin määritelmän ehdot (ii) ja (iii); ehto (ii) on helppo tarkistaa suoraan ja ehto (iii) saadaan Minkowskin epäyhtälöstä. Sen sijaan ehto (i) on voimassa vain jos $\emptyset$ on ainoa μ-nollamittainen joukon A osajoukko. Tämä ongelma saadaan korjattua, kun *samastetaan* kaikki funktiot, jotka yhtyvät μ-melkein kaikkialla joukossa A.

Määritelmä 16.8. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja olkoon $A \in \Gamma$. Määritellään funktioille $f, g \in \mathcal{L}^p(A; \mu)$ ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in A.$$

(Relaatio $\sim$ on helppo todeta ekvivalenssirelaatioksi; muista Määritelmä 3.9.) Tällöin saadaan ekvivalenssiluokat

$$[f] = \{ g \in \mathcal{L}^p(A; \mu) : g \sim f \},$$

jotka muodostavat L^p**-avaruuden** (eli Lebesguen avaruuden)

$$L^p(A) = L^p(A; \mu) = \{ [f] : f \in \mathcal{L}^p(A; \mu) \}.$$

Kaikille $[f] \in L^p(A; \mu)$ asetetaan

$$\big\| [f] \big\|_p = \big\| [f] \big\|_{L^p(A)} := \|f\|_p.$$

Huomautus. (a) Jos $f \sim g$, niin selvästi $\|f\|_p = \|g\|_p$, ja siten $\big\|[f]\big\|_p$ ei riipu luokan $[f] \in L^p(A;\mu)$ edustajan valinnasta.

(b) Funktio $[f] \mapsto \big\|[f]\big\|_p$ on todella normi avaruudessa $L^p(A)$:

(i) Olkoon $[f] \in L^p(A)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\big\|[f]\big\|_p = 0 \iff \|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \ \mu\text{-m.k. } x \in A \\ \iff f \sim 0 \iff [f] = [0].\end{aligned}$$

Koska $[0]$ on avaruuden $L^p(A;\mu)$ nolla-alkio, on normin ominaisuus (i) siis voimassa.

(ii) Kun $\lambda \in \mathbb{R}$, on $\big\|\lambda[f]\big\|_p = \big\|[\lambda f]\big\|_p = \|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p = |\lambda|\big\|[f]\big\|_p$.

(iii) Kolmioepäyhtälö seuraa vastaavasti Minkowskin epäyhtälöstä.

(c) Yleensä ei kuitenkaan tehdä eroa funktion $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$ ja luokan $[f] \in L^p(A)$ välille, vaan käytännössä puhutaan vain ”L^p-funktiosta” f. Kannattaa tosin muistaa, että tällöin ”funktiota” f voidaan muuttaa nollamittaisissa joukoissa.

(d) Joskus ero funktion f ja luokan $[f]$ välillä voi olla huomattavakin. Esimerkiksi mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \delta_0)$ on

$$L^p(\mathbb{R}^n;\delta_0) = \big\{ [f] \ \big| \ f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ |f(0)| < \infty \big\}$$

ja $[f] = \{g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \mid g(0) = f(0)\}$.

Seuraava tulos on hyvin oleellinen monissa L^p-avaruuksien sovelluksissa.

Lause 16.9 (Riesz–Fischer)**.** *Avaruus* $\big(L^p(A;\mu), \|\cdot\|_p\big)$ *on Banach-avaruus kaikille* $1 \le p \le \infty$.

Todistus. Olkoon siis $(f_k) \subset L^p(A;\mu)$ Cauchy-jono. Pitää löytää $f \in L^p(A;\mu)$ siten, että $\|f_k - f\|_p \to 0$, kun $k \to \infty$.

(1) Tapaus $1 \le p < \infty$. Koska (f_k) on Cauchy-jono, voidaan valita osajono (f_{k_j}) siten, että $\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p < 2^{-j}$ kaikille $j \in \mathbb{N}$ (mieti!). Määritellään funktiot $g_N\colon A \to [0,\infty]$ asettamalla

$$g_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \big|f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\big| \quad \text{kaikille } x \in A,$$

jolloin

$$\lim_{N\to\infty} g_N(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \big|f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\big| =: g(x)$$

kaikille $x \in A$.

Minkowskin epäyhtälön perusteella

$$\|g_N\|_p \le \sum_{j=1}^{N} \big\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\big\|_p \le \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$$

kaikille $N \in \mathbb{N}$. Koska lisäksi $0 \le g_N(x) \le g_{N+1}(x) \xrightarrow{N\to\infty} g(x)$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja kaikille $x \in A$, niin MK-lauseen 14.8 nojalla

$$\int_A |g|^p \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_A |g_N|^p \, d\mu \le 1.$$

Tästä nähdään, että $g \in L^p(A;\mu)$ ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right| = g(x) < \infty \quad \mu\text{-m.k. } x \in A,$$

joten sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \big)$ suppenee itseisesti μ-m.k. $x \in A$. Tällöin myös itse sarja $\sum_{j=1}^{\infty} \big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \big)$ suppenee μ-m.k. $x \in A$, joten voidaan määritellä (μ-m.k. $x \in A$) funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \big(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\left(f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{N} f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x) \right)}_{= f_{k_{N+1}}(x)} = \lim_{N\to\infty} f_{k_{N+1}}(x) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x), \end{aligned}$$

ja esimerkiksi voidaan asettaa $f(x) = 0$ kun sarja ei suppene.

[**Huomautus** $(*)$**:** Erityisesti tässä on juuri löydetty jonon (f_k) osajono (f_{k_j}), joka suppenee μ-melkein kaikissa pisteissä $x \in A$, koska

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) \qquad \mu\text{-m.k. } x \in A.]$$

Koska $|f(x)| \le |f_{k_1}(x)| + |g(x)|$ kaikille $x \in A$ ja $f_{k_1}, g \in L^p(A;\mu)$, niin myös $f \in L^p(A;\mu)$. Osoitetaan vielä, että $\|f_k - f\|_p \to 0$, kun $k \to 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|f_k - f_\ell\|_p^p < \varepsilon$, kun $k, \ell \ge N$. Näin ollen, kun $k \ge N$, saadaan Fatoun lemman 14.9 avulla, että

$$\int_A |f_k - f|^p \, d\mu = \int_A \lim_{j\to\infty} |f_k - f_{k_j}|^p \, d\mu \overset{\text{(Fatou)}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \underbrace{\int_A |f_k - f_{k_j}|^p \, d\mu}_{<\varepsilon,\ \text{kun } k,j \ge N} \le \varepsilon,$$

sillä $k_j \ge j$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, ja siten $\|f_k - f_{k_j}\|_p^p < \varepsilon$ kun $k, j \ge N$. Siispä raja-arvon määritelmän mukaan on todella $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$.

(2) Tapaus $p = \infty$. Kun $k, j \in \mathbb{N}$, niin määritellään

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in A : |f_k| > \|f_k\|_\infty\}, \\ B_{k,\ell} &= \{x \in A : |f_k - f_\ell| > \|f_k - f_\ell\|_\infty\} \quad \text{ja} \\ E &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_{k,\ell}. \end{aligned}$$

Tällöin kaikki joukoista A_k ja $B_{k,\ell}$ ovat normin $\|\cdot\|_\infty$ määritelmän mukaan μ-nollamittaisia, jolloin myös $\mu(E) = 0$. Koska (f_k) on Cauchy-jono normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, on $(f_k(x)) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-jono kaikilla $x \in A \setminus E$. Tällöin avaruuden $\mathbb{R}$ täydellisyyden nojalla kaikilla $x \in A \setminus E$ on olemassa raja-arvo $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Lisäksi suppeneminen on tasaista, joten erityisesti on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $x \in A \setminus E$ pätee

$$|f_k(x) - f(x)| \leq 1, \quad \text{kun } k \geq N,$$

ja näin ollen

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + \|f_N(x)\|_\infty < \infty$$

kaikille $x \in A \setminus E$. Jos määritellään vielä, että (esimerkiksi) $f(x) = 0$, kun $x \in E$, saadaan rajoitettu funktio $f \in L^\infty(A;\mu)$, jolle pätee, että $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$, kuten haluttiin. □

Huomautus. (a) Jos $\|f_k - f\|_p \to 0$, kun $k \to \infty$, niin sanotaan, että $f_k \to f$ avaruudessa $L^p(A;\mu)$. Edellisen todistuksen nojalla (katso Huomautus $(*)$) tällöin on olemassa osajono (f_{k_j}) siten, että $\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x)$ μ-m.k. $x \in A$. (Ei kuitenkaan välttämättä päde, että $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ μ-m.k. $x \in A$.)

(b) Jos $f_k, f \in L^p(A;\mu)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ (μ-melkein) kaikille $x \in A$, niin ei välttämättä päde, että $\|f_k - f\|_p \to 0$, kun $k \to \infty$. Voidaan esimerkiksi valita $f_k = k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$, $f = 0$ ja $A = [0,1]$.

(c) Tapauksessa $p = 2$ normi $\|\cdot\|_2$ saadaan sisätulosta

$$(f|g) = \int_A f g \, d\mu.$$

Siten avaruus $L^2(A;\mu)$ on täydellinen sisätuloavaruus eli *Hilbert-avaruus.*

(d) Mitta-avaruudessa $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ saadaan *jonoavaruudet* $\ell^p = L^p(\mathbb{N})$ eli "pikku-ℓ^p -avaruudet"

$$\ell^p = \left\{ (a_i)_{i=1}^\infty : \|(a_i)\|_p := \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p \right)^{1/p} < \infty,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\ell^\infty = \left\{ (a_i)_{i=1}^\infty : \|(a_i)\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| < \infty,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tällöin $\ell^p \subset \ell^q$ aina, kun $1 \leq p \leq q \leq \infty$, ja jono (a_i) on rajoitettu jos ja vain jos $(a_i) \in \ell^\infty$.

Erityisesti jonoille ovat voimassa seuraavat versiot Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöistä: kun $p, q \in \,]1,\infty[$ ovat konjugaatit eli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^\infty |b_i|^q \right)^{1/q},$$

ja kun $1 \leq p < \infty$, niin

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^\infty |b_i|^p \right)^{1/p}.$$

***Huomautus 16.10** (Sobolev-avaruudet). Käsitellään tässä huomautuksessa mitta-avaruutta $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Tällöin *Sobolev-avaruus* $W^{1,p}(\Omega)$ koostuu funktioista $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ (tai täsmällisemmin jälleen näiden ekvivalenssiluokista), joille pätee, että $f \in L^p(\Omega)$ ja myös $\|Df\| \in L^p(\Omega)$; tässä Df on funktion f niin sanottu *heikko derivaatta*. Avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ on Banach-avaruus varustettuna *Sobolev-normilla*

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|Df\|_{L^p(\Omega)}.$$

Yhtäpitävästi $W^{1,p}(\Omega)$ saadaan sileiden (eli ∞-kertaa differentioituvien) funktioiden avaruuden $C^\infty(\Omega)$ täydellistymänä normin $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ suhteen. Sobolev-avaruudet ovat äärimmäisen tärkeitä osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja variaatiolaskentaan liittyvissä kysymyksissä, esimerkiksi kun halutaan osoittaa, että tietyllä yhtälöllä tai ongelmalla on ylipäätään olemassa ratkaisu.

Viimeisten noin 20 vuoden aikana Sobolev-avaruuksien teoriaa on laajennettu yleisiin metrisiin avaruuksiin. Tähän liittyvää tutkimusta on tehty paljon myös Jyväskylän yliopistossa.

Tässä luvussa todistetaan huolellisesti Kappaleessa 10.1 mainitut euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ Fubinin lauseet. Lopuksi pohditaan hieman yleisiä tulomittoja, jotka saadaan joukkoon $X \times Y$ mitta-avaruuksien (X, Γ_μ, μ) ja (Y, Γ_ν, ν) avulla.

17.1. Fubinin lause euklidisissa avaruuksissa

Käsitellään mitta-avaruutta $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$, missä $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Tällöin pätee

Lause 17.1 (Fubinin lause, tapaus $f \geq 0$)**.** *Olkoon $n = k+\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, ja merkitään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Oletetaan lisäksi, että $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ on mitallinen funktio. Tällöin*

(i) *funktio $y \mapsto f(y, z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen m_ℓ-melkein kaikille $z \in \mathbb{R}^\ell$,*

(ii) *funktio $z \mapsto f(y, z)$ on $\mathcal{M}_\ell$-mitallinen m_k-melkein kaikille $y \in \mathbb{R}^k$,*

(iii) *funktio $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)$ on $\mathcal{M}_\ell$-mitallinen,*

(iv) *funktio $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_\ell(z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen, ja*

(v) *integrointi voidaan tehdä osissa eikä järjestyksellä ole merkitystä eli*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^\ell} f(y, z)\, dm_\ell(z)\, dm_k(y).\end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}$ niiden $\mathcal{M}_n$-mitallisten funktioiden $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ joukko, joille pätevät ominaisuudet (i), (iii) sekä kohdan (v) ensimmäinen yhtäsuuruus

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z).$$

Tavoitteena on osoittaa, että tällöin $\mathcal{F}$ on itse asiassa *kaikkien* $\mathcal{M}_n$-mitallisten funktioiden $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ joukko. Koska vastaava pätee luonnollisesti myös funktioille, joille ovat voimassa (ii), (iv) ja kohdan (v) jälkimmäinen yhtäsuuruus, todistaa tämä väitteen.

Todistus etenee usean eri vaiheen kautta:

(1) *Väite:* Jos $I = I_k \times I_\ell \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^n$ on n-väli, niin $\chi_I \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Harjoitustehtävä.

(2) *Väite:* Jos $f, g \in \mathcal{F}$ ja $\alpha, \beta \in [0, \infty[$, niin $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$. Jos lisäksi $0 \leq g \leq f$ ja $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, niin myös $f - g \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Nämä seuraavat helposti integraalin ja mitallisuuden ”lineaarisuuden” nojalla (Lauseet 6.10 ja 8.6). Oletus $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tarvitaan, jotta erotus $f - g$ on hyvin määritelty melkein kaikkialla.

(3) *Väite:* Jos $(f_j) \in \mathcal{F}$ on kasvava jono funktioita, niin myös rajafunktio $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ kuuluu joukkoon $\mathcal{F}$.

Perustelu: Funktio f on $\mathcal{M}_n$-mitallinen Lauseen 6.13 perusteella.

(i) Oletuksen (i) mukaan kaikille $j \in \mathbb{N}$ on olemassa m_ℓ-nollamittainen joukko $E_j \in \mathbb{R}^\ell$, jonka ulkopuolella $y \mapsto f_j(y,z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen. Tällöin myös yhdiste $\bigcup_{j=1}^\infty E_j$ on m_ℓ-nollamittainen ja tämän ulkopuolella $y \mapsto f(y,z)$ on $\mathcal{M}_k$-mitallinen (Lause 6.13). Siten ominaisuus (i) on voimassa.

(iii) Merkitään

$$\varphi_j(z) = \int_{\mathbb{R}^k} f_j(y,z)\,dm_k(y), \qquad z \in \mathbb{R}^\ell.$$

Tällöin myös jono (φ_j) on kasvava, joten MK-lauseen 7.5 perusteella

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_j(z) = \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dm_k(y) =: \varphi(z).$$

Näin ollen myös φ on oletuksen (iii) ja Lauseen 6.13 nojalla m_ℓ-mitallinen.

(v) Haluttu yhtäsuuruus seuraa oletuksesta (v), jonka perusteella kaikille $j \in \mathbb{N}$ on

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \varphi_j(z)\,dm_\ell(z),$$

sekä MK-lauseesta 7.5, jonka mukaan tällöin

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dm_n(x) &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dm_n(x)\\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^\ell} \varphi_j(z)\,dm_\ell(z) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \varphi(z)\,dm_\ell(z).\end{aligned}$$

(4) *Väite:* Jos $G \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, niin $\chi_G \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Tämä perustuu niin sanottuun dyadiseen ositukseen: Avoin joukko G voidaan esittää muodossa $G = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$ missä I_i ovat erillisiä n-välejä (katso Lemma 17.2). Määritellään

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^N \chi_{I_i}(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tällöin funktiojono (f_N) on kasvava ja

$$\chi_G(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \chi_{I_i}(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x) \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R}^n.$$

Kohdan **(1)** nojalla $\chi_{I_i} \in \mathcal{F}$ kaikille $i \in \mathbb{N}$, jolloin kohdan **(2)** perusteella myös $f_N = \sum_{i=1}^N \chi_{I_i} \in \mathcal{F}$ kaikille $N \in \mathbb{N}$. Siispä $\chi_G \in \mathcal{F}$ kohdan **(3)** nojalla.

(5) *Väite:* Oletetaan, että $E_j \in \mathcal{M}_n$ ja $E_j \supset E_{j+1}$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, ja lisäksi $\chi_{E_j} \in \mathcal{F}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $m_n(E_1) < \infty$. Jos merkitään $E = \bigcap_{j=1}^\infty E_j$, niin tällöin $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Koska $\chi_E = \lim_{j\to\infty} \chi_{E_j}$, seuraa (i) kuten kohdassa **(3)**.

Koska $m_n(E_1) < \infty$, niin oletuksen (v) nojalla

$$\infty > m_n(E_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_1}(x)\, dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{E_1}(y,z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z),$$

ja siten täytyy olla

$$\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{E_1}(y,z)\, dm_k(y) < \infty \qquad m_\ell\text{-m.k. } z \in \mathbb{R}^\ell.$$

Tällöin ominaisuudet (iii) ja (v) saadaan Lauseesta 7.6 (MK väheneville jonoille) aivan vastaavasti kuin kohdassa **(3)**, koska tarvittavat äärellisyysoletukset ovat voimassa.

(6) *Väite:* Jos $N \subset \mathbb{R}^n$ ja $m_n(N) = 0$, niin $\chi_N \in \mathcal{F}$.

Perustelu: On olemassa avoimet joukot $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ siten, että $m_n(G_j) \to 0$ kun $j \to \infty$ ja $N \subset \bigcap_{j=1}^\infty G_j =: B$. Tällöin $\chi_B \in \mathcal{F}$ kohtien **(4)** ja **(5)** nojalla. Lauseen 4.6 (c)-kohta sekä ominaisuus (v) funktiolle χ_B antavat

$$0 = \lim_{j\to\infty} m_n(G_j) = m_n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x)\, dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_B(y,z)\, dm_k(y)\, dm_\ell(z).$$

Näin ollen täytyy olla $\int_{\mathbb{R}^k} \chi_B(y,z)\, dm_k(y) = 0$ m_ℓ-m.k. $z \in \mathbb{R}^\ell$, mistä seuraa, että $\chi_B(y,z) = 0$ m_k-m.k. $y \in \mathbb{R}^k$ ja m_ℓ-m.k. $z \in \mathbb{R}^\ell$. Koska $0 \le \chi_N \le \chi_B$, on siis myös $\chi_N(y,z) = 0$ m_k-m.k. $y \in \mathbb{R}^k$ ja m_ℓ-m.k. $z \in \mathbb{R}^\ell$. Tällöin on helppo nähdä, että $\chi_N \in \mathcal{F}$, koska kaikki ehdoissa (i), (iii) ja (v) esiintyvät funktiot ovat nollaa melkein kaikkialla.

(7) *Väite:* Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{M}_n$-mitallinen ja $m_n(E) < \infty$, niin $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Perustelu: On olemassa avoimet joukot $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ siten, että $E \subset \bigcap_{j=1}^\infty G_j =: B$ ja $m_n(B \setminus E) = 0$; vertaa Lauseeseen 4.8 (c). Tällöin $\chi_B \in \mathcal{F}$ (kohdat **(4)** ja **(5)**) ja $\chi_{B\setminus E} \in \mathcal{F}$ (kohta **(6)**), jolloin myös $\chi_E = \chi_B - \chi_{B\setminus E} \in \mathcal{F}$ (kohta **(2)**). Huomaa, että oletus $m_n(E) < \infty$ tarvitaan, jotta voidaan valita G_1 siten, että $m_n(G_1) < \infty$, ja toisaalta $\chi_{B\setminus E} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, koska $m_n(B \setminus E) = 0 < \infty$.

(8) *Väite:* Jos $u \in Y_n^+$, niin $u \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Olkoon $u = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$, missä $A_i \in \mathcal{M}_n$ ja $a_i \ge 0$ kaikille $i = 1, 2, \dots, N$. Jos kaikille $i = 1, 2, \dots, N$ pätee, että $m_n(A_i) < \infty$, niin $u \in \mathcal{F}$ kohtien **(7)** ja **(2)** nojalla. Toisaalta jos $m_n(A_i) = \infty$ ainakin jollekin i, voidaan ensin tutkia funktioita $u_j = u\chi_{B(0,j)} \in \mathcal{F}$. Tällöin myös $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ kohdan **(3)** perusteella.

(9) *Väite:* Jos $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ on $\mathcal{M}_n$-mitallinen, niin $f \in \mathcal{F}$.

Perustelu: Lauseen 6.15 nojalla on olemassa kasvava jono funktioita $u_j \in Y_n^+$ siten, että $f = \lim_{j\to\infty} u_j$. Kohdan **(8)** mukaan $u_j \in \mathcal{F}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten myös $f \in \mathcal{F}$ kohdan **(3)** perusteella.

$\square$

Seuraavassa lemmassa esiintyvää avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}^n$ *dyadista jakoa* tarvittiin Lauseen 17.1 todistuksen kohdassa (4). Tämä jako on erittäin hyödyllinen apuväline monissa muissakin yhteyksissä.

Lemma 17.2. *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Tällöin on olemassa erilliset n-välit $I_i \subset G$, $i \in \mathbb{N}$, siten, että $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ (missä voi myös olla $I_i = \emptyset$ joillekin $i \in \mathbb{N}$).*

(Vertaa Lauseen 3.15 todistukseen, jossa perusteltiin sama väite ilman välien I_i erillisyyttä.)

Todistus. Kun $k \in \mathbb{N}$, niin olkoon $\mathcal{D}_k$ joukko, joka koostuu kaikista "puoliavoimista kuutioista" $Q \subset \mathbb{R}^n$, jotka ovat muotoa

$$Q = \left[\frac{j_1}{2^{-k}}, \frac{j_1+1}{2^{-k}}\right[\times \left[\frac{j_2}{2^{-k}}, \frac{j_2+1}{2^{-k}}\right[\times \cdots \times \left[\frac{j_n}{2^{-k}}, \frac{j_n+1}{2^{-k}}\right[,$$

missä $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \mathbb{Z}$. Tällöin kuutiot $Q \in \mathcal{D}_k$ ovat erillisiä ja toisaalta jos $Q \in \mathcal{D}_k$ ja $Q' \in \mathcal{D}_j$, missä $1 \le j < k$, niin joko $Q \cap Q' = \emptyset$ tai $Q \subset Q'$. (Kuutioita $Q \in \mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{N}$, kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *dyadisiksi kuutioiksi.*)

Asetetaan nyt rekursiivisesti kaikille $k \in \mathbb{N}$, että

$$\begin{aligned}
D_1 &= \big\{Q \in \mathcal{D}_1 : Q \subset G\big\} \\
D_2 &= \big\{Q \in \mathcal{D}_2 : Q \subset G \text{ ja } Q \cap Q' = \emptyset \text{ kaikille } Q' \in D_1\big\} \\
&\ \vdots \\
D_k &= \big\{Q \in \mathcal{D}_k : Q \subset G \text{ ja } Q \cap Q' = \emptyset \text{ kaikille } Q' \in D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_{k-1}\big\},
\end{aligned}$$

ja olkoon vielä $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Koska jokainen joukoista $\mathcal{D}_k$ on numeroituva, ovat myös joukot $D_k \subset \mathcal{D}_k$ numeroituvia, ja siten myös näiden yhdiste D on numeroituva. On selvää, että kuutiot $Q \in D$ ovat erillisiä ja että näille pätee $Q \subset G$, joten ainakin $\bigcup_{Q \in D} Q \subset G$. Pitää siis vielä osoittaa, että myös $\bigcup_{Q \in D} Q \supset G$.

Olkoon $x \in G$. Koska G on avoin, on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset G$. Toisaalta kaikille $k \in \mathbb{N}$ on olemassa kuutio $Q_k \in \mathcal{D}_k$ siten, että $x \in Q_k$, ja kun k valitaan tarpeeksi isoksi, on $x \in Q_k \subset B(x, r) \subset G$. Jos nyt pätee, että $Q_k \in D_k \subset D$, niin tällöin $x \in \bigcup_{Q \in D} Q$. Jos taas $Q_k \notin D_k$, niin täytyy olla $Q_j \in D_j \subset D$ jollekin $j = 1, 2, \ldots, k-1$, ja tällöinkin siis $x \in \bigcup_{Q \in D} Q$. Näin ollen $G \subset \bigcup_{Q \in D} Q$, ja väite on todistettu. □

Esimerkki 17.3. Kun $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$, niin merkitään

$$\begin{aligned}
E_y &= \{z \in \mathbb{R}^\ell : (y, z) \in E\} \subset \mathbb{R}^k, \qquad && \text{kun } y \in \mathbb{R}^\ell, \\
E_z &= \{y \in \mathbb{R}^k : (y, z) \in E\} \subset \mathbb{R}^\ell, \qquad && \text{kun } z \in \mathbb{R}^k.
\end{aligned}$$

Jos $E \in \mathcal{M}_n$ ja $f\colon E \to [0, \infty]$ on $\mathcal{M}_n$-mitallinen funktio, voidaan soveltaa Fubinin lausetta nollajatkoon $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \notin E. \end{cases}$$

Tällöin saadaan, että

$$\int_E f(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell}\int_{E_z} f(y,z)\,dm_k(y)\,dm_\ell(z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k}\int_{E_y} f(y,z)\,dm_\ell(z)\,dm_k(y).$$

Erityisesti tapauksessa $f = \chi_E$ saadaan

$$m_n(E) = \int_{\mathbb{R}^\ell} m_k(E_z)\,dm_\ell(z) = \int_{\mathbb{R}^k} m_\ell(E_y)\,dm_k(y).$$

Muotoillaan sitten Fubinin lause integroituville funktioille.

Lause 17.4 (Fubinin lause, yleinen tapaus)**.** *Olkoon $n = k+\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, ja merkitään avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä $x = (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$. Oletetaan lisäksi, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen ja että ainakin yksi integraaleista*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dm_n(x), \quad \int_{\mathbb{R}^\ell}\int_{\mathbb{R}^k} |f(y,z)|\,dm_k(y)dm_\ell(z), \quad \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^\ell} |f(y,z)|\,dm_\ell(z)\,dm_k(y)$$

on äärellinen. Tällöin

(i) *funktio $y \mapsto f(y,z)$ on m_k-integroituva m_ℓ-melkein kaikille $z \in \mathbb{R}^\ell$,*

(ii) *funktio $z \mapsto f(y,z)$ on m_ℓ-integroituva m_k-melkein kaikille $y \in \mathbb{R}^k$,*

(iii) *funktio $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dm_k(y)$ on m_ℓ-integroituva,*

(iv) *funktio $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^\ell} f(y,z)\,dm_\ell(z)$ on m_k-integroituva,*

(v) *$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ja integrointi voidaan tehdä osissa eikä järjestyksellä ole merkitystä eli*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^\ell}\int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dm_k(y)\,dm_\ell(z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}^\ell} f(y,z)\,dm_\ell(z)\,dm_k(y).$$

Todistus. Väitteet seuraavat, kun Lausetta 17.1 sovelletaan erikseen funktion f positiivi- ja negatiiviosiin. Erityisesti Lauseen 17.1 nojalla oletuksen kolme integraalia ovat aina yhtä suuret, ja koska yksi näistä on äärellinen, ovat ne kaikki äärellisiä. Tällöin myös vastaavat funktion f positiivi- ja negatiiviosien integraalit ovat äärellisiä. Tarkemmat yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □

Huomautus. (a) Fubinin lause 17.4 ei välttämättä päde, jos integroituvuusehto ei ole voimassa. Olkoon esimerkiksi $E = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ ja $f\colon E \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{kun } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{kun } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tällöin

$$\int_{[-1,1]}\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dm_1(x)\,dm_1(y) = \int_{[-1,1]}\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dm_1(y)\,dm_1(x) = 0,$$

mutta $f \notin \mathcal{L}^1(E)$, joten integraalia $\int_E f(x,y)\,dm_2(x,y)$ ei ole olemassa (hyvin määriteltynä); yksityiskohdat ovat harjoitustehtäviä.

(b) Olkoon $E =]0,1] \times]0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ja $f\colon E \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \in E.$$

Tällöin

$$\int_{]0,1]} \int_{]0,1]} f(x,y)\,dm_1(x)\,dm_1(y) = -\tfrac{\pi}{4},$$

mutta

$$\int_{]0,1]} \int_{]0,1]} f(x,y)\,dm_1(y)\,dm_1(x) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Siispä $f \notin \mathcal{L}^1(E)$, koska muuten saataisiin ristiriita Fubinin lauseen 17.4 kanssa. (Tämän kohdan perusteluissa auttaa huomio, että

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

kaikille $(x,y) \in E$.)

(c) Riemann-integraalillekin saadaan versioita Fubinin lauseesta, mutta tällöin täytyy olettaa Riemann-integroituvuus erikseen *kaikille* funktioille $x \mapsto f(x)$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^\ell} f(y,z)\,dz$ ja $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dy$, missä integraalit ovat siis Riemann-integraaleja. Tätä havainnollistaa seuraava tilanne:

Olkoon (p_k) kaikkien alkulukujen kasvava jono, jolloin siis $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ ja niin edelleen. Asetetaan, että

$$S_k = \big\{ \big(\tfrac{i}{p_k}, \tfrac{j}{p_k}\big) : i = 1, 2, \ldots, p_k - 1,\ j = 1, 2, \ldots, p_k - 1 \big\},\ k \in \mathbb{N},$$

ja $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Olkoon

$$f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 1 - \chi_S(x,y).$$

Tällöin f ei ole Riemann-integroituva yli välin $[0,1] \times [0,1]$, koska S on tiheä joukossa $[0,1] \times [0,1]$. Toisaalta on helppo nähdä, että

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx,$$

missä integraalit ovat hyvin määriteltyjä Riemann-integraaleja. Tämä seuraa siitä, että esimerkiksi jokaiselle kiinteälle $y \in [0,1]$ funktio $x \mapsto f(x,y)$ saa arvon 1 lukuunottamatta mahdollisesti äärellistä poikkeusjoukkoa, ja siten

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = 1 \quad \text{kaikille } y \in [0,1].$$

Kaksiulotteisen Lebesgue-integraalin kanssa tälle funktiolle ei tule mitään ongelmia, koska joukko S on nollamittainen, ja näin ollen

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f\,dm_2 = 1.$$

17.2. Tulomitat*

Oletetaan, että (X, Γ_μ, μ) ja (Y, Γ_ν, ν) ovat mitta-avaruuksia. Tällöin tulojoukkoon $X \times Y$ on mahdollista määritellä mitta niin, että Fubinin lause pätee. Seuraavassa esitellään lyhyesti yksi lähestymstapa näihin tulomittoihin; katso [Tao, Section 1.7.4].

Määritelmä 17.5. Oletetaan, että $\Gamma_1 \subset \mathcal{P}(X)$ ja $\Gamma_2 \subset \mathcal{P}(Y)$ ovat σ-algebroita. Näiden tulo $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ on "mitallisten suorakulmioiden" joukon

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \{A \times B : A \in \Gamma_1,\ B \in \Gamma_2\}$$

virittämä σ-algebra.

Kun $E \subset X \times Y$, niin merkitään

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subset Y, \qquad \text{kun } x \in X$$

ja

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\} \subset X, \qquad \text{kun } y \in Y.$$

Tällöin pätee (todistukset ohitetaan): Jos μ ja ν ovat σ-äärellisiä ja $E \in \Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu$, niin

(i) $E_x \in \Gamma_\nu$ kaikille $x \in X$ ja $E_y \in \Gamma_\mu$ kaikille $y \in Y$.

(ii) $x \mapsto \nu(E_x)$ on Γ_μ-mitallinen ja $y \mapsto \mu(E_y)$ on Γ_ν-mitallinen.

(iii) $\displaystyle\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y)$.

Edellisten kohtien perusteella voidaan asettaa määritelmä tulomitoille.

Määritelmä 17.6. Oletetaan, että (X, Γ_μ, μ) ja (Y, Γ_ν, ν) ovat mitta-avaruuksia ja että μ ja ν ovat σ-äärellisiä. Mittojen μ ja ν **tulomitta** $\mu \otimes \nu \colon \Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu \to [0, \infty]$ määritellään asettamalla

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)\, d\nu(y),$$

kun $E \in \Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu$. Näin saadaan **tulomitta-avaruus** $(X \times Y, \Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu, \mu \otimes \nu)$.

Tällöin pätee (todistukset ohitetaan), että

(i) myös $\mu \otimes \nu$ on σ-äärellinen,

(ii) $\mu \otimes \nu$ on ainoa mitta σ-algebrassa $\Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu$, jolle pätee, että

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{kaikille } A \in \Gamma_\mu \text{ ja } B \in \Gamma_\nu.$$

(iii) Fubinin lause pätee $\Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu$-mitallisille funktioille: Jos esimerkiksi $f \colon X \times Y \to [0, \infty]$ on $\Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu$-mitallinen, niin

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y),$$

missä erityisesti $x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu$ on Γ_μ-mitallinen ja $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu$ on Γ_ν-mitallinen.

Huomautus. (a) Tulomitta-avaruus ei ole välttämättä täydellinen, vaikka avaruudet (X, Γ_μ, μ) ja (Y, Γ_ν, ν) olisivatkin täydellisiä. Esimerkki tästä saadaan jo avaruudessa $\mathbb{R}^n$, sillä jos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$, niin tulomitta-avaruus

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_k \otimes \mathcal{M}_\ell, m_k \otimes m_\ell)$$

ei ole täydellinen (harjoitustehtävä). Erityisesti tämä mitta-avaruus **ei ole** sama mitta-avaruus kuin $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$. Lauseen 11.13 mukaiselle täydellistymälle kuitenkin pätee, että

$$\big(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathcal{M}_k \otimes \mathcal{M}_\ell}, \widetilde{m_k \otimes m_\ell}\big) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$$

(yksityiskohdat ohitetaan).

(b) Fubinin lause pätee myös tulomitan $\mu \otimes \nu$ täydellistymälle: Jos $f\colon X \times Y \to [0, \infty]$ on $\widetilde{\Gamma_\mu \otimes \Gamma_\nu}$-mitallinen, missä μ ja ν ovat σ-äärellisiä ja täydellisiä mittoja, niin

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\widetilde{\mu \otimes \nu}) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y);$$

katso esimerkiksi [Tao, Theorem 1.7.18].

(c) Vaihtoehtoinen lähestymistapa mittojen tuloon saadaan ulkomittojen kautta: Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja ν^* ulkomitta joukossa Y. Käytetään Lauseen 12.10 konstruktiota peiteluokkaan

$$\mathcal{K} = \{A \times B : A \in \Gamma_{\mu^*},\ B \in \Gamma_{\nu^*}\}$$

ja esimittaan $\tau(A \times B) = \mu^*(A)\nu^*(B)$. Tällöin saadaan säännöllinen ulkomitta $\mu^* \times \nu^*$ joukkoon $X \times Y$. Kaikki joukot $A \times B \in \Gamma_{\mu^*} \times \Gamma_{\nu^*}$ ovat tämän ulkomitan suhteen mitallisia ja näille pätee, että $(\mu^* \times \nu^*)(A \times B) = \mu^*(A)\nu^*(B)$; katso esimerkiksi [BBT, Section 6.1].